Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

68. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 24. JANUAR 1958)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1958

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

68. Band — **Inhalt** — 5. Heft

Seite

Puppe, D., Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. II 407
Blackburn, N., Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen 422
Lorentz, G. G., und K. Zeller, Über Paare von Limitierungsverfahren 428
Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. VI 439
Vries, H. de, and A. B. de Miranda, Groups with a small number of automorphisms 450
Baumslag, G., Finite Factors in Infinite Ascending Derived Series 465
Tachikawa, H., Duality Theorem of Character Modules for Rings with Minimum Condition 479
Gaier, D., Über ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Lückenreihen 488
Collingwood, E. F., Addendum: On sets of maximum indetermination of analytic functions 498

PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 407–421 (1958)

Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. II[10])

Von
DIETER PUPPE

§ 3. Abelsche CSS-Monoide und abelsche topologische Monoide

3.1. CSS-Monoide und topologische Monoide. Ein *Monoid* (Halbgruppe) M ist eine Menge M zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $M \times M \to M$, die wir für den Augenblick als Multiplikation schreiben (vgl. BOURBAKI [1] § 1 No. 3). $e \in M$ heißt *neutrales Element*, wenn für jedes $x \in M$ gilt: $e \cdot x = x$ und $x \cdot e = x$ (vgl. [1] § 2 No. 1). Es ist klar, was unter einem *abelschen* Monoid zu verstehen ist.

Ein CSS-Komplex $K = \bigcup_q K_q$ (vgl. 1.1), in dem alle K_q Monoide und die durch monotone Abbildungen $\beta\colon [p] \to [q]$ induzierten Abbildungen $\beta^*\colon K_q \to K_p$ Monoidhomomorphismen sind, heißt *CSS-Monoidkomplex* oder kürzer *CSS-Monoid*. Anders ausgedrückt: Ein CSS-Monoid ist ein CSS-Komplex zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $v\colon K \times K \to K$, die mit der CSS-Struktur verträglich ist (vgl. 2.6). Wir sagen, daß das CSS-Monoid K ein neutrales Element besitzt, wenn die Verknüpfung v ein neutrales Element im Sinne von 2.6 besitzt, d.h. wenn es ein $e_0 \in K_0$ gibt, so daß $(s_0)^q e_0$ für jedes q ein neutrales Element des Monoids K_q ist. Offenbar ist jede CSS-Gruppe auch ein CSS-Monoid. $SP(K)$ in 2.10 ist ein Beispiel eines abelschen CSS-Monoids mit neutralem Element, das keine CSS-Gruppe ist.

Einen topologischen Raum X mit einer Monoidstruktur, deren Multiplikation $X \times X \to X$ stetig ist, nennen wir ein *topologisches Monoid*[11]). Ist die Multiplikation eventuell nicht stetig, aber stetig auf allen kompakten Teilmengen von $X \times X$, so sprechen wir von einem *C-Monoid* (analog zur C-Gruppe, vgl. 1.2 Beispiel 1). Aus 2.6 folgt sofort (vgl. insbesondere 2.6 A. bis C.):

Satz 11. *Ist K ein (abelsches) CSS-Monoid (mit neutralem Element), so wird in $|K|$ eine Verknüpfung induziert, die $|K|$ zu einem (abelschen) C-Monoid*

[10]) Teil I dieser Arbeit ist im vorangehenden Heft dieser Zeitschrift (S. 367–406) erschienen. Beide Teile bilden sachlich eine Einheit. Die Ergebnisse von Teil II sind schon in der Einleitung zu Teil I mit erwähnt. Die Paragraphen, Abschnitte und Fußnoten werden fortlaufend weiternumeriert. Verweise auf § 1 oder § 2 beziehen sich immer auf Teil I. Das Literaturverzeichnis für beide Teile befindet sich am Ende, das Inhaltsverzeichnis am Anfang von Teil I.

[11]) Ein topologisches Monoid mit neutralem Element ist demnach ein spezieller H-Raum; vgl. J. P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Math. **54**, 425–505 (1951), Chapt. IV § 1.

(mit neutralem Element) macht. Für abzählbares K ist $|K|$ sogar ein topologisches Monoid.

Wir werden in diesem Paragraphen das Resultat von 1.7 über abelsche C-Gruppen (Folgerung B aus Satz 3) auf bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoide mit neutralem Element übertragen (vgl. 3.5 Satz 12). Ferner werden wir den in 2.10 angekündigten Satz über CSS-Monoide (vgl. 3.6 Satz 13) beweisen, der als Spezialfall die Zurückführung der Dold-Thomschen Isomorphie 2.10 (2) auf 2.10 (1) enthält (vgl. die Folgerung aus Satz 14 und 15 in 3.7). Das entscheidende Hilfsmittel ist in beiden Fällen der Hilfssatz in 3.3.

3.2. Bemerkungen über die Homotopiegruppen topologischer Monoide. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fester Punkt. Ist S^q die q-Sphäre und $y_0 \in S^q$, so kann man die Homotopiegruppe $\pi_q(X, x_0)$ bekanntlich (s. z.B. STEENROD [*12*] 15.11) auch als die Menge der Homotopieklassen rel. y_0 von stetigen Abbildungen $\varphi: (S^q, y_0) \to (X, x_0)$ [an Stelle der Abbildungen $\sigma: (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, x_0)$, vgl. 1.3] auffassen. Die Beziehung zwischen φ und σ wird durch eine Orientierung von S^q, d.h. durch die Auswahl eines der beiden erzeugenden Elemente von $\pi_q(S^q, y_0) \cong H_q(S^q) \cong \Gamma$ bestimmt: Repräsentiert $\chi: (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (S^q, y_0)$ die Orientierung, d.h. das ausgewählte erzeugende Element von $\pi_q(S^q, y_0)$, so betrachtet man die Homotopieklassen (rel. y_0 bzw. rel. $\partial\Delta_q$) von φ und $\sigma = \varphi \circ \chi$ als das gleiche Element von $\pi_q(X, x_0)$.

Ist X eine topologische Gruppe mit dem neutralen Element e, so operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, e)$ trivial in $\pi_q(X, e)$ für jedes $q > 0$ (vgl. [*12*] 16.8, 16.9). Bei dem Beweis in [*12*] wird die Existenz des Inversen in X nicht benutzt, und es handelt sich immer um Abbildungen kompakter Räume in X. Wörtlich der gleiche Beweis liefert also:

A. *Ist X ein C-Monoid mit dem neutralen Element e, so operiert $\pi_1(X, e)$ trivial in $\pi_q(X, e)$ für jedes $q > 0$.*

In einem beliebigen topologischen Raum X gehört zu einem Weg w von $x_1 \in X$ nach $x_2 \in X$ ein bestimmter Isomorphismus $\pi_q(X, x_2) \cong \pi_q(X, x_1)$ (vgl. [*12*] 16.1 bis 16.3). X heißt q-einfach (vgl. [*12*] 16.5), wenn X bogenweise zusammenhängend ist und der genannte Isomorphismus für jedes Punktepaar $x_1, x_2 \in X$ nicht von der Wahl des Weges w abhängt. In [*12*] 16.5 wird gezeigt, daß X schon dann q-einfach ist, wenn es bogenweise zusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ für ein geeignetes x_0 trivial in $\pi_q(X, x_0)$ operiert. Ferner wird dort gezeigt, daß in einem q-einfachen Raum X jede stetige Abbildung $\varphi: S^q \to X$ einer orientierten q-Sphäre S^q eindeutig ein Element α von $\pi_q(X, x_0)$ für beliebiges $x_0 \in X$ bestimmt. Die Bestimmung von α kann dabei folgendermaßen beschrieben werden: Man wähle ein $y_0 \in S_q$ und eine zu φ homotope Abbildung $\varphi': S^q \to X$ mit $\varphi'(y_0) = x_0$. (Letzteres kann man etwa dadurch erreichen, daß man zuerst $\varphi(y_0)$ mit x_0 durch einen Weg verbindet und diese Homotopie von $\varphi|\{y_0\}$ auf ganz S^q erweitert. Die Möglichkeit dieser Erweiterung ist ein sehr einfacher Fall des Homotopie-Erweiterungssatzes für CW-Komplexe, vgl. WHITEHEAD [*13*] § 5 (J).) Dann ist α die Homotopieklasse von $\varphi': (S^q, y_0) \to (X, x_0)$ rel. y_0. Aus A. folgt also:

B. *Jedes bogenweise zusammenhängende C-Monoid X mit neutralem Element e ist q-einfach für alle $q>0$; jede stetige Abbildung $S^q \to X$ einer orientierten q-Sphäre S^q bestimmt daher eindeutig ein Element von $\pi_q(X, e)$.*

Ist X eine topologische Gruppe mit dem neutralen Element e, so wird die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von repräsentierenden Abbildungen induziert (vgl. [12] 16.7). Wir bemerkten schon in 1.3, daß das auch für C-Gruppen gilt. Da die Existenz des Inversen in X in dem Beweis in [12] nicht benutzt wird, folgt sogar:

C. *Ist X ein C-Monoid mit dem neutralen Element e, so wird die Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von repräsentierenden Abbildungen induziert.*

Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob Abbildungen $(\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, e)$ oder $(S^q, y_0) \to (X, e)$ als Repräsentanten benutzt werden. Ist X bogenweise zusammenhängend, so kann man nach B. beliebige stetige Abbildungen $S^q \to X$ als Repräsentanten für die Elemente von $\pi_q(X, e)$ benutzen. *Auch die Multiplikation dieser Abbildungen induziert die richtige Gruppenoperation in $\pi_q(X, e)$.* Seien nämlich $\varphi, \psi\colon S^q \to X$ beliebige stetige Abbildungen. Wir wählen ein $y_0 \in S^q$ und deformieren φ, ψ in φ' bzw. ψ', so daß $\varphi'(y_0) = \psi'(y_0) = e$ ist. Dann sind die Homotopieklassen von $\varphi', \psi'\colon (S^q, y_0) \to (X, e)$ die nach B. durch φ bzw. ψ bestimmten Elemente α bzw. β von $\pi_q(X, e)$. Aus $\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$ folgt $\varphi \cdot \psi \simeq \varphi' \cdot \psi'$ ($\simeq$ bedeutet: homotop). Durch $\varphi' \cdot \psi'$ wird nach C. die Summe $\alpha + \beta$ repräsentiert, also auch durch $\varphi \cdot \psi$.

3.3. Ein Hilfssatz. Sei X ein bogenweise zusammenhängendes abelsches C-Monoid mit dem neutralen Element e. Die Multiplikation in X induziert eine Multiplikation im singulären CSS-Komplex $S(X)$, die $S(X)$ zu einem CSS-Monoid macht (analog zu 1.2 Beispiel 1). K sei eine abelsche CSS-Gruppe und $f\colon L \to S(X)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus eines CSS-Untermonoids L von K.

Jedem Paar $a, b \in L_q$ mit $a \cdot b^{-1} \in K_q^q = K_q \cap \bigcap_i \operatorname{Kern} d_i$ (vgl. 1.3), $q>0$, ordnen wir auf folgende Weise ein Element von $\pi_q(X, e)$ zu: fa, fb sind nach Voraussetzung stetige Abbildungen $\Delta_q \to X$, die wegen

$$d_i(a \cdot b^{-1}) = e_{q-1} \quad (= \text{neutrales Element von } K_{q-1}),$$

$$\text{also} \quad d_i a = d_i b,$$

$$\text{also} \quad d_i fa = d_i fb$$

auf dem Rande $\partial\Delta_q$ übereinstimmen. Identifiziert man zwei Exemplare Δ_q, Δ_q' von Δ_q längs ihrer Ränder, so entsteht eine q-Sphäre S^q. Zwei stetige Abbildungen $\sigma\colon \Delta_q \to X$, $\sigma'\colon \Delta_q (= \Delta_q') \to X$, die auf dem Rande $\partial\Delta_q$ übereinstimmen, definieren eine stetige Abbildung $(\sigma, \sigma')\colon S^q \to X$ durch die Festsetzung $(\sigma, \sigma')|\Delta_q = \sigma$, $(\sigma, \sigma')|\Delta_q' = \sigma'$. Nach 3.2 B. bestimmt (σ, σ') ein Element $[\sigma, \sigma']$ von $\pi_q(X, e)$. So erhalten wir speziell $(fa, fb)\colon S^q \to X$ und $[fa, fb] \in \pi_q(X, e)$. Um diese Definition völlig eindeutig zu machen, müssen wir noch

über die Orientierung von $S^q = \Delta_q \cup \Delta_q'$ verfügen (vgl. 3.2). Ist $\sigma(\partial \Delta_q) = e$ und $\varrho_q \colon \Delta_q \to e \in X$ die konstante Abbildung, so sieht man leicht, daß je nach der Orientierung von S^q entweder (σ, ϱ_q) oder (ϱ_q, σ) (im Sinne von 3.2) dasselbe Element von $\pi_q(X, e)$ wie $\sigma \colon (\Delta_q, \partial \Delta_q) \to (X, e)$ repräsentiert. Wir orientieren S^q so, daß das erstere der Fall ist.

Hilfssatz. *X sei ein bogenweise zusammenhängendes abelsches C-Monoid mit dem neutralen Element e, K eine abelsche CSS-Gruppe, L ein CSS-Untermonoid von K und $f \colon L \to S(X)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus. Wird die Gruppe K_q für jedes q von L_q erzeugt, so definiert die Zuordnung*

$$K_q^q \ni a \cdot b^{-1} \to [fa, fb] \in \pi_q(X, e)$$

eine (eindeutige) Abbildung $\hat{f} \colon K_q^q \to \pi_q(X, e)$ für $q > 0$. Diese ist ein Homomorphismus und bildet $d_{q+1} K_{q+1}^q \subset K_q^q$ in $0 \in \pi_q(X, e)$ ab, induziert also einen Homomorphismus $f_{\overline{\pi}} \colon \pi_q(K) = K_q^q / d_{q+1} K_{q+1}^q \to \pi_q(X, e)$ für $q > 0$.

Beweis. Um zu zeigen, daß $[fa, fb]$ nur von $a \cdot b^{-1}$ (und nicht von a, b einzeln) abhängt, bemerken wir zunächst, daß $(\sigma, \sigma) \colon S^q \to X$ für jedes $\sigma \colon \Delta_q \to X$ nullhomotop ist. [(σ_t, σ_t), $0 \leqq t \leqq 1$, ist eine Nullhomotopie von (σ, σ), wenn σ_t eine Nullhomotopie von σ ist.] Nun sei $a \cdot b^{-1} = a' \cdot b'^{-1} \in K_q^q$ $(a, a', b, b' \in L_q)$, folglich $a \cdot b' = a' \cdot b$. Dann ist

$$\begin{aligned}(fa, fb) &\simeq (fa, fb) \cdot (fb', fb') = \big(f(a \cdot b'), f(b \cdot b')\big) \\ &= \big(f(a' \cdot b), f(b \cdot b')\big) = (fa', fb') \cdot (fb, fb) \simeq (fa', fb').\end{aligned}$$

[Abbildungen in X werden im Sinne der Monoidstruktur von X miteinander multipliziert, d.h. für $\varphi, \psi \colon T \to X$ ist $(\varphi \cdot \psi)(t) = \varphi(t) \cdot \psi(t)$ für alle $t \in T$, T beliebig.] Daraus folgt $[fa, fb] = [fa', fb']$, und $\hat{f}$ ist demnach wirklich eindeutig definiert. $\hat{f}$ ist auch für jedes $c \in K_q^q$ erklärt, denn c läßt sich sicher in der Form $c = a \cdot b^{-1}$ mit $a, b \in L_q$ schreiben, weil K_q von L_q erzeugt wird und L_q ein Untermonoid ist.

Daß $\hat{f} \colon K_q^q \to \pi_q(X, e)$ ein Homomorphismus ist, folgt aus

$$(fa, fb) \cdot (fa', fb') = \big(f(a \cdot a'), f(b \cdot b')\big)$$

$(a, a', b, b' \in L_q;\ a \cdot b^{-1},\ a' \cdot b'^{-1} \in K_q^q)$, wenn man beachtet, daß die Addition in $\pi_q(X, e)$ durch die Multiplikation von Repräsentanten induziert wird (vgl. 3.2 C. und die anschließende Bemerkung).

Es bleibt $\hat{f}(d_{q+1} K_{q+1}^q) = 0$ zu zeigen: Sei $c = d_{q+1} \tilde{c}$, $\tilde{c} \in K_{q+1}^q$. $\tilde{c}$ können wir in der Form $\tilde{c} = \tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1}$ mit $\tilde{a}, \tilde{b} \in L_{q+1}$ schreiben, weil K_{q+1} von L_{q+1} erzeugt wird. $f\tilde{a}$ und $f\tilde{b}$ sind stetige Abbildungen $\Delta_{q+1} \to X$. Definieren wir $\varphi_t \colon \Delta_q \to \Delta_{q+1}$ durch die Bedingungen (vgl. Fig. 1)

a) $\varphi_0 = \varepsilon_{q+1} \colon \Delta_q \to \Delta_{q+1}$ (vgl. 1.1),

b) φ_1 bildet ganz Δ_q in die letzte Ecke $q+1$ von Δ_{q+1} ab,

c) die durch $t \to \varphi_t(x)$ definierte Abbildung $I = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\} \to \Delta_{q+1}$ ist affin für jedes $x \in \Delta_q$,

so stimmen $f\tilde{a} \circ \varphi_t$ und $f\tilde{b} \circ \varphi_t$ auf dem Rand $\partial \Delta_q$ überein, weil aus $\tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1} \in K_{q+1}^q = K_{q+1} \cap \bigcap_{i \leq q} \operatorname{Kern} d_i$ folgt

$$d_i \tilde{a} = d_i \tilde{b} \quad \text{für } i \leq q$$

und damit

$$d_i f\tilde{a} = d_i f\tilde{b} \quad \text{für } i \leq q.$$

$(f\tilde{a} \circ \varphi_t, f\tilde{b} \circ \varphi_t) \colon S^q \to X$ ist also definiert und liefert eine Nullhomotopie von

$$(f\tilde{a} \circ \varphi_0, f\tilde{b} \circ \varphi_0) = (f\tilde{a} \circ \varepsilon_{q+1}, f\tilde{b} \circ \varepsilon_{q+1}) = (f d_{q+1}\tilde{a}, f d_{q+1}\tilde{b}).$$

Letzteres ist aber ein Repräsentant von $\hat{f}\left(d_{q+1}(\tilde{a} \cdot \tilde{b}^{-1})\right) = \hat{f}(c)$.

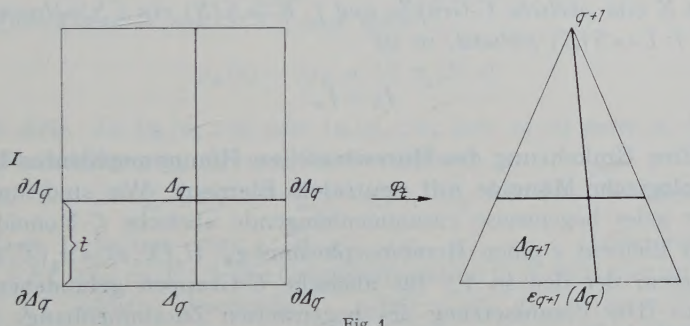

Fig. 1

3.4. Ergänzungen zu 3.3. X, X' seien bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoide mit den neutralen Elementen e, e', und $\varphi \colon X \to X'$ sei ein stetiger Monoidhomomorphismus mit $\varphi(e) = e'$. φ induziert einen CSS-Monoidhomomorphismus $\varphi \colon S(X) \to S(X')$ und Homomorphismen

$$\varphi_\pi \colon \pi_q(X, e) \to \pi_q(X', e') \quad \text{für } q > 0.$$

Wie in 3.3 sei ferner K eine abelsche CSS-Gruppe, $L < K$ ein CSS-Untermonoid, so daß K_q für jedes q von L_q erzeugt wird, und $f \colon L \to S(X)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus.

A. *Für die durch f und $\varphi \circ f$ nach dem Hilfssatz in 3.3 induzierten Homomorphismen* $f_{\overline{\pi}} \colon \pi_q(K) \to \pi_q(X, e)$ *bzw.* $(\varphi \circ f)_{\overline{\pi}} \colon \pi_q(K) \to \pi_q(X', e')$ *gilt*

$$(\varphi \circ f)_{\overline{\pi}} = \varphi_\pi \circ f_{\overline{\pi}}.$$

Beweis. Repräsentiert $a \cdot b^{-1} \in K_q^q$ $(a, b \in L_q)$ das Element $\alpha \in \pi_q(K)$, so ist $(\varphi \circ f)_{\overline{\pi}}(\alpha) = [(\varphi \circ f)a, (\varphi \circ f)b] = [\varphi \circ fa, \varphi \circ fb]$. Ferner ist $(\varphi \circ fa, \varphi \circ fb) = \varphi \circ (fa, fb)$, also $[\varphi \circ fa, \varphi \circ fb] = \varphi_\pi [fa, fb] = \varphi_\pi f_{\overline{\pi}}(\alpha)$.

Zweitens zeigen wir, daß die Definition von $f_{\overline{\pi}}$ verträglich ist mit der in 1.5 getroffenen Definition der Homomorphismen zwischen Homotopiegruppen, die durch CSS-Homomorphismen zwischen CSS-Gruppen induziert werden. Ist nämlich X sogar eine abelsche C-Gruppe, $S(X)$ also eine abelsche CSS-Gruppe, und läßt sich $f \colon L \to S(X)$ zu einem CSS-Homomorphismus $\bar{f} \colon K \to S(X)$

fortsetzen, so ist sowohl $\bar{f}_\pi$ (nach 1.5) als auch $f_{\bar{\pi}}$ und $\bar{f}_{\bar{\pi}}$ (nach 3.3) definiert. Ist $c = a \cdot b^{-1} \in K_q^q$ $(a, b \in L_q)$ ein Repräsentant von $\alpha \in \pi_q(K)$, so ist nach Definition

$$f_{\bar{\pi}}(\alpha) = [fa, fb] = [\bar{f}a, \bar{f}b] = \bar{f}_{\bar{\pi}}(\alpha).$$

Andererseits können wir $\bar{f}_{\bar{\pi}}(\alpha)$ durch $(\bar{f}c, \bar{f}e_q) : S^q \to X$ repräsentieren, wobei e_q das neutrale Element von K_q ist. $\bar{f}e_q$ ist das neutrale Element von $S_q(X)$, also die konstante Abbildung $\Delta_q \to e \in X$; folglich repräsentiert $(\bar{f}c, \bar{f}e_q)$ dasselbe Element von $\pi_q(X, e)$ wie $\bar{f}c : (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, e)$ (vgl. 3.3). Da $\bar{f}_\pi(\alpha)$ nach Definition durch $\bar{f}c \in S_q^q(X)$ repräsentiert wird, folgt $\bar{f}_{\bar{\pi}}(\alpha) = \bar{f}_\pi(\alpha)$, und wir können feststellen:

B. *Ist X eine abelsche C-Gruppe und $\bar{f} : K \to S(X)$ ein CSS-Homomorphismus, der $f : L \to S(X)$ fortsetzt, so ist*

$$f_{\bar{\pi}} = \bar{f}_\pi.$$

3.5. Eine Umkehrung des Hurewiczschen Homomorphismus für abelsche topologische Monoide mit neutralem Element. Wir sind nun in der Lage, für jedes bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoid X mit neutralem Element e einen Homomorphismus $g_* : H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$, $q > 0$, zu definieren, der den in 1.7 für abelsche C-Gruppen gefundenen verallgemeinert. (Die Voraussetzung des bogenweisen Zusammenhangs ist zwar einschränkend hinzugetreten; sie spielt aber für $q > 0$ offenbar keine wesentliche Rolle.)

Sei $K = \Gamma S(X)/\Gamma S(e)$. Die Elemente von K_q sind also Restklassen von formalen Summen $\sum_i n_i \sigma_i$, $\sigma_i \in S_q(X)$. Wir setzen

$$\tilde{L}_q = \left\{ \sum_i n_i \sigma_i \,\middle|\, \sigma_i \in S_q(X),\ n_i \geq 0 \right\} \subset \Gamma_q S(X)$$

und bezeichnen das natürliche Bild von $\tilde{L}_q$ in K_q mit L_q. $\tilde{L} = \bigcup_q \tilde{L}_q$, $L = \bigcup_q L_q$ sind CSS-Untermonoide von $\Gamma S(X)$ bzw. K. Analog zu 1.7 sei $\tilde{g} : \tilde{L} \to S(X)$ derjenige CSS-Monoidhomomorphismus, der in $S(X) \subset \tilde{L} \subset \Gamma S(X)$ die Identität ist und die neutralen Elemente in die neutralen Elemente überführt, d.h. es gilt

$$\tilde{g}\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \prod_i \sigma_i^{n_i}, \qquad \sigma_i \in S_q(X),\ n_i \geq 0$$

$$\tilde{g}(0_q) = \varrho_q,$$

wobei $\varrho_q : \Delta_q \to e \in X$ die konstante Abbildung ist und die Multiplikation auf der rechten Seite im Sinne der CSS-Monoidstruktur von $S(X)$ zu verstehen ist. Wegen $\tilde{g}(\Gamma S(e)) \subset S(e) = \{\varrho_q\}$ induziert $\tilde{g}$ einen CSS-Monoidhomomorphismus $g : L \to S(X)$. Da K_q von L_q erzeugt wird, ist der Hilfssatz von 3.3 anwendbar und liefert die Homomorphismen $g_{\bar{\pi}} : \pi_q(K) \to \pi_q(X, e)$ für $q > 0$.

Zusammen mit dem nach 1.4 Satz 2 bestehenden Isomorphismus $\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K) = H_q(X, e)$ ergibt sich schließlich:

$$g_*\colon H_q(X, e) \to \pi_q(X, e), \qquad q > 0.$$

Explizit erhält man $g_*(\alpha)$ für jedes $\alpha \in H_q(X, e)$ nach folgender Vorschrift:

Man wähle ein $c = \sum_i n_i \sigma_i \in \Gamma_q S(X)$, *dessen Restklasse* $\bar{c} \in K_q = \Gamma_q S(X)/\Gamma_q S(e)$ *die Homologieklasse* $\alpha \in H_q(X, e) = \mathfrak{H}_q(K)$ *repräsentiert, und zwar so, daß* $d_j \bar{c} = 0$ *ist für alle* j. [Daß das möglich ist, folgt aus der Isomorphie $\pi_q(K) \cong \mathfrak{H}_q(K)$, vgl. 1.4 Satz 2 Folgerung D. $\bar{c}$ repräsentiert gleichzeitig das Urbild von α in $\pi_q(K)$.] *Dann bilde man* $\sigma_+ = \prod_{n_i > 0} \sigma_i^{n_i}$, $\sigma_- = \prod_{n_i < 0} \sigma_i^{-n_i}$ [*Multiplikation im Sinne der CSS-Monoidstruktur von* $S(X)$] *und setze*

$$g_*(\alpha) = [\sigma_+, \sigma_-] \in \pi_q(X, e)$$

(vgl. 3.3, S. 409). *Ist* $\{n_i | n_i > 0\}$ *oder* $\{n_i | n_i < 0\}$ *leer, so ist unter* σ_+ *bzw.* σ_- *die konstante Abbildung* $\varrho_q\colon \Delta_q \to e \in X$ *zu verstehen.*

Beweis. Sei $c_+ = \sum_{n_i > 0} n_i \sigma_i$, $c_- = \sum_{n_i < 0} (-n_i)\, \sigma_i \in \tilde{L}_q$ mit den Restklassen $\bar{c}_+$, $\bar{c}_- \in L_q$. Nach Definition von g ist $g\bar{c}_+ = \sigma_+$, $g\bar{c}_- = \sigma_-$. Andererseits ist $\bar{c} = \bar{c}_+ - \bar{c}_- \in K_q^q$, also nach 3.3 (die Gruppenoperation in K wird hier im Unterschied zu 3.3 additiv geschrieben): $g_{\bar{\pi}}(\alpha') = [g\bar{c}_+, g\bar{c}_-] = [\sigma_+, \sigma_-]$, wenn $\alpha' \in \pi_q(K)$ das durch $\bar{c}$ repräsentierte Element bezeichnet. Nach Definition von g_* ist aber $g_*(\alpha) = g_{\bar{\pi}}(\alpha')$.

Im Fall, daß X sogar eine abelsche C-Gruppe, $S(X)$ also eine CSS-Gruppe ist, läßt sich $g\colon L \to S(X)$ zu einem CSS-Homomorphismus $\bar{g}\colon K \to S(X)$ fortsetzen, der mit dem in 1.7 eingeführten (und dort mit g bezeichneten) übereinstimmt. Nach 3.4 B. ist $g_{\bar{\pi}} = \bar{g}_\pi$, d.h. die hier gegebene Definition von g_* ist mit der in 1.7 verträglich. Ebenso wie in 1.7 gilt hier:

$g_*\colon H_q(X, e) \to \pi_q(X, e)$ *ist natürlich, d.h. für jeden stetigen Monoidhomomorphismus* $\varphi\colon X \to X'$ *zwischen den abelschen C-Monoiden* X, X' *mit den neutralen Elementen* e, $e' = \varphi(e)$ *ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, e) & \xrightarrow{\varphi_H} & H_q(X', e') \\ \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g'_*} \\ \pi_q(X, e) & \xrightarrow{\varphi_\pi} & \pi_q(X', e') \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Wie in der obigen Vorschrift zur Bestimmung von g_* sei $c = \sum_i n_i \sigma_i$, $\sigma_i \in S_q(X)$; die Restklasse $\bar{c} \in \Gamma S(X)/\Gamma S(e)$ repräsentiere $\alpha \in H_q(X, e)$, und es sei $d_j \bar{c} = 0$ für alle j. Dann wird $\varphi_\pi g_*(\alpha)$ durch $\varphi \circ \left(\prod_{n_i > 0} \sigma_i^{n_i}, \prod_{n_i < 0} \sigma_i^{-n_i} \right)$ und $g'_* \varphi_H(\alpha)$ durch $\left(\prod_{n_i > 0} (\varphi \circ \sigma_i)^{n_i}, \prod_{n_i < 0} (\varphi \circ \sigma)^{-n_i} \right)$ repräsentiert. Da diese beiden Abbildungen gleich sind, folgt die Behauptung.

Der Hurewiczsche Homomorphismus $h_*: \pi_q(X, e) \to H_q(X, e)$, $q > 0$, ist für das C-Monoid X mit dem neutralen Element e wie für jeden topologischen Raum X definiert (vgl. 1.6). In Verallgemeinerung der Folgerung B aus Satz 3 in 1.7 zeigen wir:

Satz 12. *Für jedes bogenweise zusammenhängende abelsche C-Monoid X mit dem neutralen Element e ist die Zusammensetzung*

$$\pi_q(X, e) \xrightarrow{h_*} H_q(X, e) \xrightarrow{g_*} \pi_q(X, e), \qquad q > 0$$

des Hurewiczschen Homomorphismus h_* mit dem oben definierten Homomorphismus g_* die Identität. Daher ist h_* monomorph[12]*, g_* epimorph*[12]*) und $h_* \pi_q(X, e)$ direkter Summand in $H_q(X, e) \cong H_q(X)$ $(q > 0)$.*

Beweis. Sei $\sigma: (\Delta_q, \partial\Delta_q) \to (X, e)$ ein Repräsentant von $\alpha \in \pi_q(X, e)$. Faßt man σ als Element von $\Gamma S(X)$ auf, so repräsentiert die Restklasse $\bar{\sigma} \in \Gamma S(X)/\Gamma S(e)$ das Element $h_*(\alpha) \in H_q(X, e)$ (vgl. 1.6). $d_j\sigma$ ist für jedes j die konstante Abbildung $\varrho_{q-1}: \Delta_{q-1} \to e \in X$, also ist $d_j\bar{\sigma} = 0$ in $\Gamma S(X)/\Gamma S(e)$. Nach der oben angegebenen Vorschrift zur Bestimmung von g_* ist also $g_* h_*(\alpha) = [\sigma, \varrho_q]$. Da σ und (σ, ϱ_q) das gleiche Element von $\pi_q(X, e)$ repräsentieren (vgl. 3.3, S. 410), ist schließlich $g_* h_*(\alpha) = \alpha$.

3.6. Die Homotopieäquivalenz zwischen abelschen topologischen Gruppen und erzeugenden Untermonoiden. Wir kommen nun zu dem wichtigsten Satz dieses Paragraphen:

Satz 13. *K sei eine abelsche CSS-Gruppe, $L < K$ ein CSS-Untermonoid, so daß L_q für jedes q das neutrale Element von K_q enthält und die Gruppe K_q erzeugt. Das abelsche C-Monoid $|L|$ mit dem neutralen Element e (vgl. 3.1 Satz 11) sei zusammenhängend. Dann induziert die natürliche Injektion (vgl. 2.1)*

$$K \supset L \xrightarrow{i} S(|L|)$$

(gemäß 3.3 Hilfssatz) die Homomorphismen

$$i_{\bar{\pi}}: \pi_q(K) \longrightarrow \pi_q(|L|, e), \qquad q > 0.$$

$i_{\bar{\pi}}$ ist ein Isomorphismus auf $\pi_q(|L|, e)$ und seine Zusammensetzung

$$\pi_q(K) \xrightarrow{i_{\bar{\pi}}} \pi_q(|L|, e) \xrightarrow{|j|_\pi} \pi_q(|K|, e)$$

mit $|j|_\pi$, induziert durch die Injektion $|j|: |L| \to |K|$, ist der natürliche Isomorphismus $\pi_q(K) \cong \pi_q(|K|, e)$ von 2.8 Satz 8; d.h. etwas ungenauer: $i_{\bar{\pi}}$ und $|j|_\pi$ sind zueinander inverse Isomorphismen.

Beweis. $|L|$ ist bogenweise zusammenhängend, weil es ein CW-Komplex und nach Voraussetzung zusammenhängend ist [vgl. WHITEHEAD [13] § 5 (M)]. Also ist der Hilfssatz in 3.3 anwendbar und liefert

$$i_{\bar{\pi}}: \pi_q(K) \to \pi_q(|L|, e) \qquad q > 0.$$

[12]) Zur Definition von „monomorph" und „epimorph" s. Fußnote [2]) S. 368.

Die Injektion $j: L \to K$ induziert die Injektion $|j|: |L| \to |K|$ (vgl. 2.3 D.). Die Injektion $|j|$ ist mit den Multiplikationen in $|L|$ und $|K|$ verträglich, wie man unmittelbar aus der charakterisierenden Gleichung 2.6 (2) (S. 391) entnimmt, d.h. $|j|$ ist ein Monoidhomomorphismus. Nach 3.4 A. ist daher

$$(|j| \circ i)_{\bar{\pi}} = |j|_{\pi} \circ i_{\bar{\pi}}.$$

Andererseits ist die natürliche Injektion $\bar{i}: K \to S(|K|)$ eine Fortsetzung von $|j| \circ i: L \to S(|K|)$, also ist nach 3.4 B.

$$(|j| \circ i)_{\bar{\pi}} = \bar{i}_{\pi}.$$

$\bar{i}_{\pi}: \pi_q(K) \to \pi_q(|K|, e)$ ist aber gerade der natürliche Isomorphismus von 2.8 Satz 8, d.h. wir haben gezeigt: Die Zusammensetzung

$$\pi_q(K) \xrightarrow{i_{\bar{\pi}}} \pi_q(|L|, e) \xrightarrow{|j|_{\pi}} \pi_q(|K|, e)$$

ist der natürliche Isomorphismus.

Daraus folgt bereits, daß $i_{\bar{\pi}}$ monomorph ist; zu zeigen bleibt nur noch die Epimorphie. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(K) & \xrightarrow{i_{\bar{\pi}}} & \pi_q(|L|, e) \\ \uparrow{\scriptstyle \bar{g}_*} & & \uparrow{\scriptstyle g_*} \\ H_q(L, E) & \xrightarrow{i_H} & H_q(|L|, e) \end{array} \tag{1}$$

Darin ist $E = \{e_q\}$ der von den neutralen Elementen $e_q \in K_q$ gebildete CSS-Unterkomplex von $L \subset K$. Offenbar ist $|E| = e$ das neutrale Element von $|L| \subset |K|$ (vgl. 2.6 C.). i_H ist der natürliche Isomorphismus (vgl. 2.7 Satz 7). g_* ist der in 3.5 definierte natürliche Homomorphismus, und $\bar{g}_*$ setzt sich zusammen aus $j_H: H_q(L, E) \to H_q(K, E)$, induziert durch die Injektion $j: L \to K$, und dem natürlichen Homomorphismus $g_*: H_q(K, E) \to \pi_q(K)$ von 1.7. Wir zeigen, daß das Diagramm (1) kommutativ ist:

Sei $\alpha \in H_q(L, E)$, repräsentiert durch die Restklasse $\bar{c} \in \Gamma_q L / \Gamma_q E$ von $c = \sum_{\nu} n_\nu a_\nu \in \Gamma_q L$, $a_\nu \in L_q$. Nach 1.4 Folgerung D können wir c so wählen, daß $d_\mu \bar{c} = 0$ ist für alle μ. Auch $j_H(\alpha)$ wird durch $\bar{c}$ repräsentiert, und nach Definition von $\bar{g}_*$ (vgl. 1.7) ist $a = \prod_{\nu} a_\nu^{n_\nu} \in K_q^q = K_q \cap \bigcap_{\mu}$ Kern d_μ ein Repräsentant von $\bar{g}_*(\alpha)$. Mit

$$a_+ = \prod_{n_\nu > 0} a_\nu^{n_\nu} \qquad (= e_q, \text{ falls } n_\nu \leqq 0 \text{ für alle } \nu)$$

$$a_- = \prod_{n_\nu < 0} a_\nu^{-n_\nu} \qquad (= e_q, \text{ falls } n_\nu \geqq 0 \text{ für alle } \nu)$$

ist $a = a_+ \cdot a_-^{-1}$, $a_+, a_- \in L_q$. Nach Definition von $i_{\bar{\pi}}$ (vgl. den Hilfssatz in 3.3) ist also

$$i_{\bar{\pi}} \bar{g}_*(\alpha) = [i a_+, i a_-] = \left[i\left(\prod_{n_\nu > 0} a_\nu^{n_\nu} \right),\ i\left(\prod_{n_\nu < 0} a_\nu^{-n_\nu} \right) \right]. \tag{2}$$

Andererseits wird $i_H(\alpha)$ durch die Restklasse von $\sum_\nu n_\nu \cdot i a_\nu$ in $\Gamma S(|L|)/\Gamma S(e)$ repräsentiert, und nach 3.5 (S. 413) ist

$$(3) \qquad g_* i_H(\alpha) = \Big[\prod_{n_\nu > 0} (i a_\nu)^{n_\nu}, \prod_{n_\nu < 0} (i a_\nu)^{-n_\nu} \Big].$$

Die Gleichung 2.6 (2), die die Multiplikation in $|L|$ charakterisiert, besagt, daß $i: L \to S(|L|)$ ein CSS-Monoidhomomorphismus ist. Daraus folgt, daß die rechten Seiten von (2) und (3) gleich sind, also gilt $i_{\bar\pi} \circ \bar g_* = g_* \circ i_H$, d.h. das Diagramm (1) ist kommutativ.

Nun ist i_H isomorph nach 2.7 Satz 7, g_* epimorph nach 3.5 Satz 12, folglich ist $i_{\bar\pi} \circ \bar g_* = g_* \circ i_H$ und schließlich auch $i_{\bar\pi}$ epimorph. Das beendet den Beweis von Satz 13.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 13 (K = abelsche CSS-Gruppe, L = CSS-Untermonoid von K, L_q erzeugt K_q und enthält das neutrale Element $e_q \in K_q$ für alle q, $|L|$ ist zusammenhängend) ist $|L|$ Deformationsretrakt von $|K|$.*

Beweis. $|L|$ ist nach Voraussetzung (und weil es ein CW-Komplex ist) bogenweise zusammenhängend. Wir wollen zunächst das gleiche für $|K|$ beweisen: Sei $z \in |K|$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es ein $c \in K_q$ (für geeignetes q) und ein $t \in \Delta_q$, so daß $z = c(t)$ ist. Weil L_q ein Untermonoid von K_q ist und K_q erzeugt, gibt es $a, b \in L_q$ mit $c = a \cdot b^{-1}$. Nach Definition der Multiplikation in $|K|$ [vgl. 2.6 (2), (4)] folgt $z = c(t) = (a \cdot b^{-1})(t) = a(t) \cdot \big(b(t)\big)^{-1}$, und $x = a(t)$, $y = b(t)$ sind Elemente von $|L|$. Aus einem Weg, der y in $|L|$ mit dem neutralen Element e verbindet, erhält man durch Übergang zum Inversen und Multiplikation mit x einen Weg, der $z = x \cdot y^{-1}$ in $|K|$ mit x verbindet; x läßt sich in $|L| \subset |K|$ weiter mit e verbinden.

Satz 13 besagt insbesondere, daß die Injektion $|j|: |L| \to |K|$ Isomorphismen der Homotopiegruppen induziert. Aus dem Satz von WHITEHEAD [*13*] § 1 Th. 1 folgt daher, daß $|j|$ eine Homotopieäquivalenz ist. Sei $\psi: |K| \to |L|$ homotopieinvers zu $|j|$, d.h. $\psi \circ |j| \simeq$ Identität, $|j| \circ \psi \simeq$ Identität. Weil $\psi||L| = \psi \circ |j|$ zur Identität von $|L|$ homotop ist, gibt es nach dem Homotopieerweiterungssatz für CW-Komplexe (vgl. [*13*] § 5 (J)) eine Abbildung $\psi': |K| \to |L|$ mit $\psi' \simeq \psi$ und $\psi'||L| =$ Identität. ψ' ist also eine Retraktion von $|K|$ auf $|L|$. Wegen $|j| \circ \psi' \simeq |j| \circ \psi \simeq$ Identität von $|K|$ ist es eine Deformationsretraktion.

Bemerkung. Im Hinblick auf die Voraussetzungen von Satz 13 stellen wir noch folgendes fest: Ist $K = \bigcup_q K_q$ eine CSS-Gruppe und $L = \bigcup_q L_q$ ein CSS-Unterkomplex von K, so gilt:

A. *L ist genau dann ein CSS-Untermonoid von K, wenn $|L|$ ein Untermonoid von $|K|$ ist.*

B. *Die Aussagen*

a) *L_0 enthält das neutrale Element $e_0 \in K_0$,*

b) *L_q enthält das neutrale Element $e_q \in K_q$ für alle q,*

c) *$|L|$ enthält das neutrale Element $e \in |K|$*

sind äquivalent.

C. *Die Gruppe K_q wird genau dann für alle q von L_q erzeugt, wenn die Gruppe $|K|$ von $|L|$ erzeugt wird.*

Demnach könnte man die Voraussetzungen von Satz 13 auch so formulieren:

$|K|$ sei die geometrische Realisierung einer abelschen CSS-Gruppe K, und L sei ein CSS-Unterkomplex von K, so daß $|L|$ ein zusammenhängendes Untermonoid von $|K|$ ist, das das neutrale Element enthält und die Gruppe $|K|$ erzeugt.

Beweis von A. Wenn L ein CSS-Untermonoid von K ist, so folgt aus der charakterisierenden Gleichung 2.6 (2) für die Multiplikation in $|K|$, daß $|L|$ ein Untermonoid von $|K|$ ist.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß $|L|$ ein Untermonoid von $|K|$ ist, und wollen zeigen: $a, a' \in L_p$ impliziert $a \cdot a' \in L_p$ für jedes p. Nach 2.6 (2) ist $(a \cdot a')(t) = a(t) \cdot a'(t)$ für alle $t \in \Delta_p$; wegen $a(t), a'(t) \in |L|$ und weil $|L|$ ein Untermonoid ist, gilt also $(a \cdot a')(\Delta_p) \subset |L|$. Gemäß dem Hilfssatz in 2.1 schreiben wir $a \cdot a'$ in der Form $a \cdot a' = \beta^* b$ mit nicht ausgeartetem $b \in K_q$ und $\beta: [p] \xrightarrow{\text{auf}} [q]$. Dann ist $b(\Delta_q) = b(\beta(\Delta_p)) = (a \cdot a')(\Delta_p) \subset |L|$, d.h. $b(\mathring{\Delta}_q)$ ist eine q-Zelle von $|L|$ (vgl. 2.1). Also gibt es ein nicht ausgeartetes $b' \in L_q$, so daß $b': \Delta_q \to |L| \subset |K|$ eine charakteristische Abbildung für $b(\mathring{\Delta}_q)$ ist. Auch $b: \Delta_q \to |K|$ ist eine charakteristische Abbildung für $b(\mathring{\Delta}_q)$. Da die Zuordnung zwischen den nicht ausgearteten Elementen von K_q und den q-Zellen von $|K|$ umkehrbar eindeutig ist, gilt $b' = b$ und damit $b \in L_q$. Weil L ein CSS-Unterkomplex ist, folgt $a \cdot a' = \beta^* b \in L_p$.

Beweis von B. a) folgt trivialerweise aus b). Aus $e_0 \in L_0$ folgt umgekehrt $e_q = (s_0)^q e_0 \in L_q$, weil L ein CSS-Unterkomplex ist, d.h. a) ist mit b) äquivalent.

Wie wir in 2.6 sahen (vgl. den Beweis von 2.6 C.), ist $e = e_0(\Delta_0)$ das neutrale Element von $|K|$. Daher ist c) eine Folge von a). Setzt man umgekehrt c) voraus, so muß es ein $a \in L_0$ geben mit $a(\Delta_0) = e$, weil e eine 0-Zelle von $|L| \subset |K|$ ist. Da die Zuordnung zwischen den Elementen von K_0 (die alle nicht ausgeartet sind) und den 0-Zellen von $|K|$ umkehrbar eindeutig ist, gilt $a = e_0$, also $e_0 \in L_0$.

Beweis von C. Nehmen wir zunächst an, daß K_q für alle q von L_q erzeugt wird. Sei $x \in |K|$ ein beliebiger Punkt. Dann gibt es ein $a \in K_q$ (mit geeignetem q) und ein $t \in \Delta_q$, so daß $a(t) = x$ ist. Nach Voraussetzung gibt es $a_1, \ldots, a_n \in L_q$ mit $a = a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n}$, $\nu_i = \pm 1$. Mit Hilfe von 2.6 (2), (4) folgt $x = a(t) = (a_1(t))^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (a_n(t))^{\nu_n}$. Wegen $a_i(t) \in |L|$ zeigt das, daß $|K|$ von $|L|$ erzeugt wird.

Sei nun umgekehrt $|K|$ als von $|L|$ erzeugt vorausgesetzt. Wir betrachten zunächst ein nicht ausgeartetes Element $b \in K_q$. $t \in \mathring{\Delta}_q = \Delta_q - \partial \Delta_q$ sei beliebig, aber fest gewählt. Nach Voraussetzung gibt es $x_1, \ldots, x_n \in |L|$ mit $b(t) = x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n}$, $\nu_i = \pm 1$. Nach 2.5 Folgerung B gibt es $a_i \in L_p$ und ein $t' \in \Delta_p$, so daß $x_i = a_i(t')$ ist. Wir wollen annehmen, daß p minimal gewählt wurde. Dann ist sogar $t' \in \mathring{\Delta}_p = \Delta_p - \partial \Delta_p$, denn andernfalls gäbe es ein j mit $t' = \varepsilon_j(t'')$, $t'' \in \Delta_{p-1}$, und es wäre $x_i = a_i(\varepsilon_j(t'')) = (d_j a_i)(t'')$, $d_j a_i \in L_{p-1}$, also p nicht

minimal. Mit Hilfe von 2.6 (2), (4) folgt

$$b(t) = (a_1(t'))^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (a_n(t'))^{\nu_n} = (a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n})(t').$$

Zerlegen wir $a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n}$ gemäß dem Hilfssatz in 2.1 in der Form $a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n} = \beta'^* b'$ mit nicht ausgeartetem $b' \in K_{q'}$ und $\beta' : [p] \xrightarrow{\text{auf}} [q']$, so folgt weiter $b(t) = b'(\beta'(t'))$. Wegen $t' \in \mathring{\Delta}_p$ ist $\beta'(t') \in \mathring{\Delta}_{q'}$, also haben die Zellen $b(\mathring{\Delta}_q)$ und $b'(\mathring{\Delta}_{q'})$ von $|K|$ einen Punkt gemeinsam. Daraus folgt, daß sie sogar gleich sind, d.h. $q = q'$ und $b = b'$. Weil $\beta' : [p] \to [q]$ eine monotone Abbildung auf $[q]$ ist, gibt es ein monotones $\gamma : [q] \to [p]$, so daß $\beta' \circ \gamma$ die Identität ist. Mit einem solchen γ gilt: $b = b' = \gamma^* \beta'^* b' = \gamma^*(a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n}) = a_1'^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n'^{\nu_n}$ mit $a_i' = \gamma^* a_i \in L_q$. Damit ist gezeigt, daß sich jedes nicht ausgeartete $b \in K_q$ durch Multiplikation und Übergang zum Inversen aus Elementen von L_q erhalten läßt. Ist $a \in K$ irgendein Element, so schreiben wir es in der Form $a = \beta^* b$ mit nicht ausgeartetem b. Zu b gibt es $a_1', \ldots, a_n' \in L$ mit $b = a_1'^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n'^{\nu_n}$, also ist $a = \beta^* b = (\beta^* a_1')^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (\beta^* a_n')^{\nu_n}$, $\beta^* a_i' \in L$, und das zeigt die Behauptung für a.

3.7. Anwendung auf das unendliche symmetrische Produkt. Wir wollen nun die Ergebnisse von 3.6 speziell auf das Paar $SP(K) \subset \bar{\Gamma} K$ (vgl. 2.10) anwenden, wobei K irgendein CSS-Komplex mit Grundpunkt ist, d.h. in K_0 ist ein Element l_0 ausgezeichnet. Wie in 2.10 wird $l_q = (s_0)^q l_0$ und $L = \{l_q\}$ gesetzt. L ist dann ein CSS-Unterkomplex von K. $\bar{\Gamma}_q K = \Gamma_q K / \Gamma_q L$ ist die von $K_q - l_q$ erzeugte freie abelsche Gruppe; sie besteht aus den formalen Summen $\sum_j n_j b_j$, $b_j \in K_q$, mit der Relation $l_q = 0$. $SP_q(K)$ ist das Untermonoid der Elemente $\sum_j n_j b_j$ mit $n_j \geqq 0$. Offenbar enthält $SP_q(K)$ das neutrale Element von $\bar{\Gamma}_q K$ und erzeugt die Gruppe $\bar{\Gamma}_q K$. Die Voraussetzungen von 3.6 Satz 13 sind also für das Paar $SP(K) \subset \bar{\Gamma} K$ (an Stelle von $L \subset K$ in 3.6) erfüllt, falls $|SP(K)|$ zusammenhängend ist.

$|K|$ ist offenbar genau dann zusammenhängend, wenn $H_0(K) = H_0(|K|)$ (vgl. 2.7 Satz 7) frei zyklisch ist. Daraus entnimmt man sehr leicht:

Hilfssatz. *$|K|$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sich jedes $a \in K_0$ durch eine „Kette" $c_1, \ldots, c_m \in K_1$ mit l_0 „verbinden" läßt, d.h.*

$$d_0 c_1 = a$$
$$d_1 c_i = d_0 c_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$
$$d_1 c_m = l_0.$$

Unter Benutzung dieses Kriteriums zeigen wir, daß $|SP(K)|$ zusammenhängend ist, wenn $|K|$ es ist: Sei $a = \sum_{j=1}^{k} n_j b_j \in SP_0(K)$, $b_j \in K_0$. Weil $|K|$ zusammenhängend ist, gibt es eine Verbindung $c_1, \ldots, c_m \in K_1$ von b_k mit l_0. Mit der Abkürzung $a_r = \sum_{j=1}^{r} n_j b_j$ ist dann $s_0 a_{k-1} + n_k c_i$, $i = 1, \ldots, m$, eine Verbindung von $a = a_k$ mit a_{k-1} in $SP(K)$ (s_0 ist der 0-te Ausartungsoperator,

vgl. 1.1). In der Tat gilt

$$d_0(s_0 a_{k-1} + n_k c_1) = d_0 s_0 a_{k-1} + n_k d_0 c_1 = a_{k-1} + n_k b_k = a,$$
$$d_1(s_0 a_{k-1} + n_k c_i) = a_{k-1} + n_k d_1 c_i$$
$$= a_{k-1} + n_k d_0 c_{i+1} = d_0(s_0 a_{k-1} + n_k c_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, m-1,$$
$$d_1(s_0 a_{k-1} + n_k c_m) = a_{k-1} + n_k l_0 = a_{k-1}.$$

Entsprechend läßt sich a_{k-1} mit a_{k-2}, a_{k-2} mit a_{k-3} usw. und daher $a = a_k$ mit $a_0 = 0$ verbinden. Nach dem Hilfssatz, angewandt auf $SP(K)$ [mit dem Grundpunkt $0 \in SP_0(K)$], ist also $|SP(K)|$ zusammenhängend.

Die Folgerung aus Satz 13 in 3.6 ergibt nun für das Paar $SP(K) \subset \bar{\Gamma}K$:

Satz 14. *Ist K ein CSS-Komplex mit Grundpunkt, und ist $|K|$ zusammenhängend, so ist $|SP(K)|$ Deformationsretrakt von $|\bar{\Gamma}K|$.*

Insbesondere induziert die Injektion $|SP(K)| \subset |\bar{\Gamma}K|$ Isomorphismen der Homotopiegruppen

$$\pi_q(|SP(K)|, 0) \cong \pi_q(|\bar{\Gamma}K|, 0), \qquad q > 0. \tag{1}$$

Daher folgt

$$H_q(|K|) = H_q(|K|, l) \cong \pi_q(|SP(K)|, 0), \qquad q > 0 \tag{2}$$

[$l = l_q(\Delta_q) = |L|$ ist der Grundpunkt von $|K|$] aus der entsprechenden Isomorphie

$$H_q(|K|, l) \cong \pi_q(|\bar{\Gamma}K|, 0) \tag{3}$$

[vgl. 2.9 (4), 2.10 (3)]. Da wir in 2.9 Satz 9 für (3) einen bestimmten Isomorphismus angegeben haben, ist auch der Isomorphismus (2) weitgehend explizit, zumal man in dem Isomorphismus

$$i_{\bar{\pi}}: \pi_q(\bar{\Gamma}K) \to \pi_q(|SP(K)|, 0) \tag{4}$$

von 3.6 Satz 13 einen gewissen Ersatz für eine explizite Umkehrung von (1) hat. Wir wollen aber noch eine andere Definition des Isomorphismus (2) geben, die in Analogie zu 2.9 Satz 9 steht:

Seien k: $K \subset SP(K)$ und j: $SP(K) \subset \bar{\Gamma}K$ die natürlichen Injektionen [vgl. 2.10 (14)]. $j \circ k$ ist dann die CSS-Abbildung $f: K \to \bar{\Gamma}K = \Gamma K / \Gamma L$ von 2.9 (S. 398). In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_q(|K|, l) & \xrightarrow{|k|_H} & H_q(|SP(K)|, 0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_q(|SP(K)|, 0) \\ & & \downarrow{\scriptstyle |j|_H} & & \downarrow{\scriptstyle |j|_\pi} \\ & & H_q(|\bar{\Gamma}K|, 0) & \xrightarrow{g'_*} & \pi_q(|\bar{\Gamma}K|, 0) \end{array}$$

($q > 0$) seien g_*, g'_* die natürlichen Homomorphismen von 3.5 bzw. 1.7. Es ist daher kommutativ (3.5, S. 413). Also gilt

$$|j|_\pi \circ g_* \circ |k|_H = g'_* \circ |j|_H \circ |k|_H = g'_* \circ |j \circ k|_H = g'_* \circ |f|_H.$$

Rechts steht der in 2.9 Satz 9 angegebene Isomorphismus für (3), $|j|_\pi$ ist der Isomorphismus (1), also ist $g_* \circ |k|_H$ der Isomorphismus (2), den man aus (3) und (1) erhält. Wir ersetzen noch $H_q(|K|, l)$ durch die (für $q>0$) isomorphe Gruppe $H_q(|K|)$ und stellen fest:

Satz 15. *Ist K ein CSS-Komplex (mit Grundpunkt), und ist $|K|$ zusammenhängend, so ist die Zusammensetzung*

$$H_q(|K|) \longrightarrow H_q(|SP(K)|, 0) \xrightarrow{g_*} \pi_q(|SP(K)|, 0)$$

des durch die Injektion $|K| \subset |SP(K)|$ induzierten Homomorphismus mit dem in 3.5 definierten natürlichen Homomorphismus g_* ein Isomorphismus ($q>0$).

Falls K abzählbar ist, gilt nach 2.10 (11)

$$|SP(K)| = SP(|K|)$$

und nach 2.10 (12)

$$|\bar{\Gamma}K| = AG(|K|).$$

Man kann also in den Sätzen 14 und 15 $|SP(K)|$ durch $SP(|K|)$ und $|\bar{\Gamma}K|$ durch $AG(|K|)$ ersetzen und erhält:

Folgerung. *Ist K ein abzählbarer CSS-Komplex (mit Grundpunkt) und ist $|K|$ zusammenhängend, so ist $SP(|K|)$ Deformationsretrakt von $AG(|K|)$. Man erhält einen Isomorphismus*

$$H_q(|K|) \cong \pi_q(SP(|K|), 0), \qquad q>0,$$

wenn man $H_q(|K|) \to H_q(SP(|K|), 0)$, induziert durch die Injektion $|K| \subset SP(|K|)$, mit dem natürlichen Homomorphismus $g_*: H_q(SP(|K|), 0) \to \pi_q(SP(|K|), 0)$ (vgl. 3.5) zusammensetzt.

Bemerkung 1. Wie in der Bemerkung 1 am Schluß von 2.10 kann man auch hier aus den Ergebnissen über CSS-Komplexe mit Grundpunkt entsprechende Resultate für Paare von CSS-Komplexen $L \subset K$ (L nicht leer) erhalten. Wir haben dort einen CSS-Komplex $\bar{K}$ mit Grundpunkt konstruiert ($\bar{K}_q$ entsteht aus K_q durch Identifizieren aller Elemente von L_q zu einem einzigen l_q), so daß $H_q(|K|, |L|) \cong H_q(|\bar{K}|, l)$ und $|\bar{K}| = |K|/|L|$ ist. Aus der Isomorphie $H_q(|\bar{K}|) = H_q(|\bar{K}|, l) \cong \pi_q(SP(|\bar{K}|), 0)$ ($q>0$) der obigen Folgerung ergibt sich also

$$H_q(|K|, |L|) \cong \pi_q(SP(|K|/|L|), 0), \qquad q>0$$

für jedes Paar $L \subset K$ (L nicht leer) von abzählbaren CSS-Komplexen mit zusammenhängendem $|K|/|L|$.

Bemerkung 2. Obwohl $SP(|K|)$ für überabzählbares K nicht dieselbe Topologie zu haben braucht wie $|SP(K)|$, ist $\pi_q(SP(|K|), 0) \cong \pi_q(|SP(K)|, 0)$, weil $SP(|K|)$ und $|SP(K)|$ die gleichen kompakten Teilmengen haben (vgl. 2.10 Bemerkung 2). Daher läßt sich die Dold-Thomsche Isomorphie $H_q(|K|) \cong \pi_q(SP(|K|), 0)$ auch für überabzählbares K aus Satz 15 gewinnen.

Bemerkung 3. Die hier benutzte Methode zum Beweis der Sätze 14 und 15 gestattet eine naheliegende Verallgemeinerung: Ist $M = \bigcup_q M_q$ irgendein CSS-Untermonoid von $\overline{\Gamma}K$, das $SP(K)$ enthält, so sind offenbar die Voraussetzungen von 3.6 Satz 13 auch für das Paar $M \subset \overline{\Gamma}K$ erfüllt, wenn man noch annimmt, daß $|M|$ zusammenhängend ist. Also ist in Verallgemeinerung von Satz 14 auch $|M|$ *Deformationsretrakt von* $|\overline{\Gamma}K|$ (nach der Folgerung in 3.6). Ebenso kann man in dem Beweis für Satz 15 ohne jede weitere Änderung $SP(K)$ durch M ersetzen und erhält: *Die Zusammensetzung von* $H_q(|K|) \to H_q(|M|, 0)$, *induziert durch die Injektion* $|K| \subset |M|$, *mit dem natürlichen Homomorphismus* $g_*: H_q(|M|, 0) \to \pi_q(|M|, 0)$ *von 3.5 ist ein Isomorphismus*

$$H_q(|K|) \cong \pi_q(|M|, 0), \qquad q > 0.$$

CSS-Monoide M, die den genannten Voraussetzungen genügen, gewinnt man z.B. folgendermaßen: K' sei ein CSS-Unterkomplex von K, der den „Grundpunkt" $l_0 \in K_0$ (und damit ganz $L = \{l_q\}$) enthält. Dann bestehe M_q aus denjenigen Elementen $\sum_j n_j b_j \in \overline{\Gamma}_q K$, $b_j \in K_q$, bei denen $n_j \geqq 0$ ist, falls b_j nicht in K'_q liegt (während für die $b_j \in K'_q$ beliebige Koeffizienten zugelassen sind). Wie man sofort bestätigt, ist M ein CSS-Untermonoid von $\overline{\Gamma}K$, das $SP(K)$ enthält. [Speziell ist $M = SP(K)$ für $K' = L$ und $M = \overline{\Gamma}K$ für $K' = K$.] Wenn $|K|$ und $|K'|$ zusammenhängend sind, so auch $|M|$. Das beweist man analog wie oben für $|SP(K)|$: Sei $a = \sum_{j=1}^{k} n_j b_j \in M_0$, $b_j \in K_0$. Weil $|K|$ und $|K'|$ zusammenhängend sind, gibt es eine Verbindung $c_1, \ldots, c_m \in K_1$ von b_k mit l_0 (vgl. Hilfssatz, S. 418), die sogar in K'_1 liegt, wenn $b_k \in K'_0$ ist. Setzt man $a_r = \sum_{j=1}^{r} n_j b_j$, so ist [wie im Fall $M = SP(K)$] $s_0 a_{k-1} + n_k c_i$, $i = 1, \ldots, m$, eine Verbindung von $a = a_k$ mit a_{k-1}. (Diese Verbindung liegt in M, weil n_k nur dann negativ sein kann, wenn $b_k \in K'_0$ ist; dann ist nach der Wahl der c_i auch $c_i \in K'_1$.) Ebenso läßt sich a_{k-1} mit a_{k-2}, a_{k-2} mit a_{k-3} usw. und daher auch $a = a_k$ mit $a_0 = 0$ verbinden. Nach dem Hilfssatz, angewandt auf M (mit dem Grundpunkt $0 \in M_0$), ist also $|M|$ zusammenhängend.

Das Literaturverzeichnis befindet sich am Ende von Teil I, S. 406.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. März 1957)

Blackburn, N.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 422–427 (1958)

Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen

Von
Norman Blackburn

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, die sich als Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen darstellen läßt. Dann ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ durch zwei Elemente erzeugbar (Huppert [1] S. 252, Satz 17) und $\mathfrak{G}'$ ist abelsch (Itô [2]). In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Falle, daß $\mathfrak{G}'$ nicht zyklisch ist. Es ist schon bekannt, daß in diesem Falle $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ vom Typ $(n, 1)$ ist, wobei n eine ganze Zahl größer als 1 ist (Itô und Ohara [3]). Es ist unser Ziel, in diesem Falle die Struktur von $\mathfrak{G}'$ zu untersuchen.

Bezeichnungen. Für Elemente x, y einer Gruppe bedeutet $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ den Kommutator von x und y. Ferner schreiben wir $x^y = y^{-1}xy = x[x, y]$. Wenn U, V zwei Komplexe in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ sind, dann bedeutet $[U, V]$ das Erzeugnis aller Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$, $y \in V$. Wir schreiben $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ und bezeichnen mit

$$\mathfrak{G} \geq \mathfrak{G}_2 \geq \mathfrak{G}_3 \geq \cdots$$

die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{G}_2 = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, $\mathfrak{G}_i = [\mathfrak{G}_{i-1}, \mathfrak{G}]$ $(i = 3, 4, \ldots)$. $\Phi(\mathfrak{G})$ bedeutet die Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$.

Zuerst beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 1. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei das Produkt der zyklischen 2-Gruppen $\{a\}$ und $\{b\}$, und $\mathfrak{G}'$ sei nicht zyklisch. $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ sei vom Typ $(n, 1)$ mit $n > 1$. Dann folgt:*

(i) $(\mathfrak{G}_2 : \mathfrak{G}_3) = 2$; $\big(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')\big) = 2$; *wenn $\mathfrak{G}'$ eine Ordnung größer als 4 hat, dann ist* $\big(\Phi(\mathfrak{G}') : \mathfrak{G}_4\big) = 2$.

(ii) *a und b haben beide die Ordnung 2^n modulo $\mathfrak{G}'$, und a^{2^n}, b^{2^n} liegen in $\mathfrak{G}_3$, aber nicht in $\Phi(\mathfrak{G}')$.*

Die Tatsache, daß $(\mathfrak{G}_2 : \mathfrak{G}_3) = 2$ ist, folgt aus dem einfachen Hilfssatz:

Hilfssatz. *$\mathfrak{G}$ sei eine p-Gruppe.*

(i) *Wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$ eine abelsche Gruppe vom Typ $(r_1, r_2, \ldots, r_\alpha)$ mit $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_\alpha$ ist, dann ist der Exponent von $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3$ höchstens p^{r_2}.*

(ii) *Der Exponent von $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ ist nicht kleiner als derjenige von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$.*

Ist nämlich $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$ das direkte Produkt von $\{x_1\mathfrak{G}_2\}, \{x_2\mathfrak{G}_2\}, \ldots, \{x_\alpha\mathfrak{G}_2\}$, wobei $x_i\mathfrak{G}_2$ von der Ordnung p^{r_i} ist, dann wird $\mathfrak{G}$ von $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ erzeugt (s. Zassenhaus [4] Kap. IV, Satz 12), und daher wird $\mathfrak{G}_2$ von allen $[x_i, x_j]$ $(1 \leq i < j \leq \alpha)$ und $\mathfrak{G}_3$ erzeugt. Aber $x_j^{p^{r_2}}$ ist ein Element von $\mathfrak{G}_2$ für $j > 1$, und so ist

$$[x_i, x_j^{p^{r_2}}] \equiv 1 \text{ modulo } \mathfrak{G}_3.$$

Wenn man die Kommutatorformeln

$$[ab, c] = [a, c]^b [b, c], \qquad [a, bc] = [a, c] [a, b]^c$$

benutzt, dann sieht man leicht, daß

$$[x_i, x_j^{p^{r_2}}] \equiv [x_i, x_j]^{p^{r_2}} \text{ modulo } \mathfrak{G}_3,$$

und daher wird $\mathfrak{G}_2'\mathfrak{G}_3$ von Elementen erzeugt, deren Ordnungen höchstens p^{r_2} sind. Damit ist (i) bewiesen. Um (ii) zu beweisen, setzen wir voraus, daß $\mathfrak{G}_{i-1}$ von $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ und $\mathfrak{G}_i$ erzeugt wird, wobei $y_j^{p^s}$ ein Element von $\mathfrak{G}_i$ ist ($j = 1, 2, \ldots, \beta$). Dann wird $\mathfrak{G}_i'$ von $\mathfrak{G}_{i+1}$ und allen $[x_k, y_j]$ ($k = 1, 2, \ldots, \alpha$; $j = 1, 2, \ldots, \beta$) erzeugt. Genau wie im Beweis von (i) sieht man, daß

$$[x_k, y_j]^{p^s} \equiv [x_k, y_j^{p^s}] \equiv 1 \text{ modulo } \mathfrak{G}_{i+1},$$

und das behauptete Ergebnis folgt leicht.

Jetzt setzen wir den Beweis von Satz 1 fort. Um zu zeigen, daß $(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')) = 2$, bemerken wir zunächst, daß $\Phi(\mathfrak{G}')$ der Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}'$ ist, und daß $\mathfrak{G}_3$ wegen $(\mathfrak{G}' : \mathfrak{G}_3) = 2$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ ist: daher folgt $\Phi(\mathfrak{G}') \leqq \mathfrak{G}_3$. Auch ist $\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')$ abelsch vom Typ (1, 1), weil $\mathfrak{G}'$ von zwei Elementen, aber nicht von einem, erzeugt werden kann. Daher ist $(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')) = 2$.

$\mathfrak{G}$ wird von a und b erzeugt, und daher hat entweder a oder b die Ordnung 2^n, modulo $\mathfrak{G}'$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß a diese Ordnung hat, weil $\mathfrak{G} = \{a\}\{b\} = \{b\}\{a\}$ ist. Also gibt es ein solches Element c von $\mathfrak{G}$, daß c^2 in $\mathfrak{G}'$ liegt, und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ das direkte Produkt von $\{a\mathfrak{G}'\}$ und $\{c\mathfrak{G}'\}$ ist. $\mathfrak{G}$ wird von a und c erzeugt. Wir werden jetzt beweisen, daß a^{2^n} in $\mathfrak{G}_3$ aber nicht in $\Phi(\mathfrak{G}')$ liegt, daß c im Zentralisator von $\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')$ liegt und daß c^2 in $\mathfrak{G}_3$ liegt. Um dieses zu tun, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\Phi(\mathfrak{G}') = 1$ ist. Also ist $\mathfrak{G}'$ vom Typ (1, 1).

Wir setzen $x = [a, c]$, so daß $\mathfrak{G}_2$ von x und $\mathfrak{G}_3$ erzeugt ist. y sei das Element von $\mathfrak{G}_3$, das ungleich 1 ist. Da x in $\mathfrak{G}_2$ liegt, so dürfen wir schreiben

$$[a, x] = y^\alpha, \qquad [c, x] = y^\beta,$$

wobei α, β entweder gleich 0 oder 1 sind, aber sie sind nicht beide 0, weil $[a, x]$ und $[c, x]$ $\mathfrak{G}_3$ erzeugen. Jetzt setzen wir

$$a^{2^n} = x^\varkappa y^\delta, \qquad c^2 = x^\lambda y^\nu.$$

Dann sind a und $x^\varkappa$ vertauschbar, weil y im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt, und wir schließen, daß $\varkappa\alpha \equiv 0\,(2)$ ist. Ferner ist

$$[x^\varkappa, c] = [a^{2^n}, c] = a^{-2^n} (a^c)^{2^n} = a^{-2^n} (ax)^{2^n}.$$

Aber $(ax)^2 = a^2 x [x, a] x = a^2 x^2 y^{-\alpha}$, und daher ist $(ax)^{2^n} = a^{2^n}$, da $n > 1$ ist. Also ist $[x^\varkappa, c] = 1$, und $\beta\varkappa \equiv 0\,(2)$. Da α und β nicht beide 0 sind, so ist $\varkappa \equiv 0\,(2)$, und a^{2^n} ein Element von $\mathfrak{G}_3$.

Ganz ähnlich erörtern wir die Gleichung $c^2 = x^\lambda y^\nu$. c und x^λ sind vertauschbar; also ist $\beta\lambda \equiv 0(2)$. Auch ist

$$[x^\lambda, a] = [c^2, a] = c^{-2}(c^a)^2 = c^{-2}(c\,x^{-1})^2 = [c, x]\,x^{-2} = y^\beta,$$

und $\beta \equiv \alpha\lambda(2)$. Wenn $\lambda \not\equiv 0(2)$ wäre, dann folgte erstens, daß $\beta \equiv 0(2)$ wäre, und zweitens, daß $\alpha \equiv 0(2)$ wäre, was unmöglich ist. Daher ist $\lambda \equiv 0(2)$, und so ist $\beta \equiv 0(2)$; d.h., c liegt im Zentralisator von $\mathfrak{G}'$, und c^2 liegt in $\mathfrak{G}_3$. Auch ist $\alpha \equiv 1(2)$ und $[a, x] = y$.

Es bleibt noch zu beweisen, daß a^{2^n} ungleich 1 ist. Da $\mathfrak{G} = \{a\}\{b\}$ ist, so darf man schreiben $c = a^k b^l$. l ist ungerade, weil sonst c in dem Erzeugnis von a und $\Phi(\mathfrak{G})$ liegen würde und $\mathfrak{G}$ von a und c nicht erzeugt sein könnte. Daher ist $\{b\}$ von b^l erzeugt, und wir dürfen b durch b^l ersetzen. Also nehmen wir an, daß $c = a^k b$ ist. Dann ist $b = a^{-k}c$, und es folgt

$$b^2 = (a^{-k}c)^2 = c^{a^k} a^{-2k} c.$$

Nach einer kurzen Induktion ist

$$c^{a^k} = c\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}},$$

und daher ist

$$\begin{aligned} b^2 &= c\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}}\,a^{-2k}\,c \\ &= c\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}}\,c^{a^{2k}}\,a^{-2k} \\ &= c^2\,x^{-k}\,y^{\binom{k}{2}-k}\,a^{-2k} \\ &= x^{-k}\,y^{\nu+\binom{k}{2}-k}\,a^{-2k}. \end{aligned}$$

Wenn h irgendein Element aus $\mathfrak{G}'$ ist, dann existieren Zahlen $\varrho(h)$, $\sigma(h)$, so daß $h = a^{\varrho(h)} b^{\sigma(h)}$. Daher ist

$$h = a^{\varrho(h)}(a^{-k}c)^{\sigma(h)},$$

und so ist

$$1 \equiv a^{\varrho(h) - k\sigma(h)}\,c^{\sigma(h)} \text{ modulo } \mathfrak{G}'.$$

Wir schließen, daß $\sigma(h) \equiv 0(2)$ ist und schreiben $\sigma(h) = 2\sigma'(h)$. Wir sehen leicht, daß a^2 und x vertauschbar sind, und es folgt

$$h = a^{\varrho(h)}\,b^{2\sigma'(h)} = a^{\varrho(h) - 2k\sigma'(h)}\,x^{-k\sigma'(h)}\,y^{\left(\nu+\binom{k}{2}-k\right)\sigma'(h)}.$$

Wenn wir diese Gleichung modulo $\mathfrak{G}'$ betrachten, dann finden wir, daß $\varrho(h) - 2k\,\sigma'(h) \equiv 0(2^n)$ ist, und wir dürfen schreiben $\varrho(h) - 2k\,\sigma'(h) = 2^n\tau(h)$. Daher ist

$$h = x^{-k\sigma'(h)}\,y^{\delta\tau(h) + \left(\nu+\binom{k}{2}-k\right)\sigma'(h)}.$$

Wenn wir $h = x$ nehmen, dann finden wir $k\sigma'(x) \equiv 1(2)$, und daher ist k ungerade. Wenn wir $h = y$ nehmen, dann finden wir $k\sigma'(y) \equiv 0(2)$, und daher

ist $\sigma'(y) \equiv 0\,(2)$. Also ist $y = y^{\delta\tau(y)}$, δ ungerade und $a^{2^n} = y$. Damit sind die obenstehenden Behauptungen bewiesen.

Da k ungerade ist, so hat b auch die Ordnung 2^n, modulo $\mathfrak{G}'$, und wir können daher genau dasselbe für b beweisen wie für a. Also ist b^{2^n} ein Element von $\mathfrak{G}_3$ aber nicht von $\Phi(\mathfrak{G}')$. Damit ist Satz 1 (ii) bewiesen.

Es bleibt nur zu beweisen, daß für $(\mathfrak{G}' : 1) > 4$ gilt $(\Phi(\mathfrak{G}') : \mathfrak{G}_4) = 2$. Aus $(\mathfrak{G}_3 : \Phi(\mathfrak{G}')) = 2$ folgt, daß $\mathfrak{G}_3/\Phi(\mathfrak{G}')$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}')$ liegt, und daher ist $\mathfrak{G}_4 \leqq \Phi(\mathfrak{G}')$. Daher müssen wir nur zeigen, daß $(\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}_4) = 4$ ist. Offenbar ist $(\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}_4) \leqq 4$, weil $\mathfrak{G}_3$ von $\mathfrak{G}_4$, $[a, x]$ und $[c, x]$ erzeugt ist und nach dem Hilfssatz $\mathfrak{G}_3/\mathfrak{G}_4$ den Exponenten 2 hat. Um die Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, daß $(\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}_4) = 2$ ist. Da $(\mathfrak{G}' : 1) > 4$ ist, existiert ein solcher Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}_4$ enthalten ist, und $(\mathfrak{G}_4 : \mathfrak{M}) = 2$ (s. Zassenhaus [4] Kap. IV, S. 104). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{M} = 1$ ist. Da $\mathfrak{G}_4$ und $\Phi(\mathfrak{G}')$ dieselbe Ordnung haben und $\mathfrak{G}_4 \leqq \Phi(\mathfrak{G}')$ ist, so ist $\mathfrak{G}_4 = \Phi(\mathfrak{G}')$. $\mathfrak{G}_3$ wird von $\mathfrak{G}_4$, $[a, x]$ und $[c, x]$ erzeugt, aber $[c, x] \in \Phi(\mathfrak{G}') = \mathfrak{G}_4$: daher wird $\mathfrak{G}_3$ von $\mathfrak{G}_4$ und $[a, x] = z$ erzeugt. Weil a^{2^n} in $\mathfrak{G}_3$ aber nicht in $\mathfrak{G}_4$ liegt, so ist $a^{2^n} \equiv z$ modulo $\mathfrak{G}_4$. Daher sind a und z vertauschbar, weil $\mathfrak{G}_4$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt. Auch ist

$$[z, c] = z^{-1} z^c = z^{-1} [a, x]^c = z^{-1} [a^c, x^c] = z^{-1} [a\,x, x] = 1,$$

da $[x, c]$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt. Dies ist ein Widerspruch, und damit ist Satz 1 bewiesen.

Jetzt sind wir in der Lage, unseren Hauptsatz zu beweisen. Dieser zeigt, daß $\mathfrak{G}'$ eine ganz einfache Struktur hat, mit dem eigenartigen Ausnahmefalle, in dem $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ vom Typ (2, 1) ist.

Satz 2. *$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, die sich als Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen darstellen läßt, $\mathfrak{G}'$ sei nicht zyklisch, $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ sei vom Typ $(n, 1)$ mit $n > 1$. Wenn $n > 2$ ist, dann ist $\mathfrak{G}'$ vom Typ $(m, 1)$ für geeignetes m.*

Wir nehmen an, daß der Satz nicht richtig sei. Wenn $\mathfrak{N}$ die Gruppe bedeutet, die aus allen Elementen von $\mathfrak{G}'$ besteht, die sich als vierte Potenzen von Elementen von $\mathfrak{G}'$ darstellen lassen, dann ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ eine abelsche Gruppe vom Typ (2, 2). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $\mathfrak{N} = 1$ setzen. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen für a, c, x wie früher und schreiben

$$[a, x] = y_1, \qquad [c, x] = y_2,$$

so daß $\mathfrak{G}_3$ von $\mathfrak{G}_4$, y_1 und y_2 erzeugt wird. Nach dem Beweis von Satz 1 ist c im Zentralisator von $\mathfrak{G}'/\Phi(\mathfrak{G}')$, und so ist y_2 in $\Phi(\mathfrak{G}')$. Nach dem Hilfssatz und Satz 1 ist $\mathfrak{G}_3/\mathfrak{G}_4$ vom Typ (1, 1), und $\mathfrak{G}_4 < \Phi(\mathfrak{G}') < \mathfrak{G}_3$: daher liegt y_1 nicht in $\Phi(\mathfrak{G}')$ und $y_1^2 = z$ liegt in $\mathfrak{G}_4$. Es gilt $z \neq 1$, weil $\Phi(\mathfrak{G}')$ aus den Elementen von $\mathfrak{G}'$ der Ordnung 2 besteht, aber $y_1 \notin \Phi(\mathfrak{G}')$. Auch ist $y_2^2 = z^2 = 1$. x^2 liegt in $\Phi(\mathfrak{G}')$ aber nicht in $\mathfrak{G}_4$, weil $\Phi(\mathfrak{G}')$ aus allen zweiten Potenzen von Elementen von $\mathfrak{G}'$ besteht und $\mathfrak{G}'$ von x und y_1 erzeugt wird: daher ist

$x^2 = y_2 z^\nu$ für geeignetes ν. Also ist

$$[a, y_2] = [a, x^2] = y_1^2 = z,$$
$$[c, y_2] = [c, x^2] = y_2^2 = 1.$$

Auch ist

$$[c, y_1] = y_1^{-c} y_1 = [x, a]^c y_1 = [x^c, a^c] y_1 = [x y_2^{-1}, a x] y_1$$
$$= [x y_2^{-1}, a] y_1 = y_1^{-1} [a, y_2] y_1 = z.$$

Jetzt ist $(a x)^2 = a^2 x [x, a] x = a^2 x^2 y_1^{-1}$. Man sieht leicht, daß a^2 vertauschbar mit x^2 und y_1 ist: daher ist

$$(a x)^{2^n} = a^{2^n} x^{2^n} y_1^{-2^{n-1}} = a^{2^n},$$

weil $n > 2$ ist. Aber nach Satz 1 (ii), ist $a^{2^n} = y_1 y_2^\varrho z^\sigma$, für geeignete ϱ, σ. Daher ist

$$[c, y_1 y_2^\varrho z^\sigma] = [c, a^{2^n}] = (a^c)^{-2^n} a^{2^n} = (a x)^{-2^n} a^{2^n} = 1.$$

Dagegen ist

$$[c, y_1 y_2^\varrho z^\sigma] = [c, y_1] = z,$$

und wir haben einen Widerspruch. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken, daß in diesem Falle $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ $(i = 4, 5, \ldots, k)$ die Ordnung 2 hat, wobei k die Klasse von $\mathfrak{G}$ ist. Denn nach Satz 2 ist $\Phi(\mathfrak{G}')$ zyklisch, und daher sind $\mathfrak{G}_4$ und $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ $(i = 4, 5, \ldots, k)$ zyklisch. Aber nach dem Hilfssatz sind $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ $(i = 4, 5, \ldots, k)$ elementar abelsch und daher von der Ordnung 2.

Im Falle, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ vom Typ $(2, 1)$ ist, können wir nicht schließen, daß $\mathfrak{G}'$ vom Typ $(m, 1)$ ist, und zwar ist jeder Typ von $\mathfrak{G}'$ mit zwei Invarianten möglich. Um dieses zu zeigen, sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe vom Typ (m, m), die von x und y erzeugt ist, wobei m eine gegebene ganze Zahl ist. Der Automorphismus von $\mathfrak{A}$, der jedes Element in das inverse Element überführt, hat die Ordnung 2, und daher dürfen wir eine Gruppe $\mathfrak{H}$ bilden, indem wir zu $\mathfrak{A}$ ein erzeugendes Element c und die Relationen

$$[x, c] = x^{-2}, \quad [y, c] = y^{-2}, \quad c^2 = 1$$

hinzunehmen. Der Automorphismus von $\mathfrak{H}$, der x in $x y^{-1}$, y in y^{-1} und c in $c x^{-1}$ abbildet, läßt $x^{-2} y$ ungeändert, und seine vierte Potenz ist der innere Automorphismus, der von $x^{-2} y$ induziert wird. Nun bilden wir eine Gruppe $\mathfrak{K}$, indem wir zu $\mathfrak{H}$ ein erzeugendes Element a und die Relationen

$$[x, a] = y^{-1}, \quad [y, a] = y^{-2}, \quad [c, a] = x^{-1}, \quad a^4 = x^{-2} y$$

hinzunehmen. Es ist klar, daß x und y $\mathfrak{K}'$ erzeugen. Auch ist $(a c)^4 = y$, und $\{a\} \cap \{a c\} = \{y^{2^{m-1}}\}$. Also ist die Anzahl der Elemente von $\{a\}\{a c\}$ gleich $2^{2m+3} = (\mathfrak{K} : 1)$; d. h., $\{a\}\{a c\} = \mathfrak{K}$.

Jetzt sei $1 \leq l \leq m$. Man sieht leicht, daß $\{x^{-2}y\}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{R}$ ist, und wir nehmen $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}/\{(x^{-2}y)^{2^l}\}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ das Produkt von zwei zyklischen Gruppen, und $\mathfrak{G}'$ ist vom Typ (m, l).

Literatur

[1] Huppert, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953). — [2] Itô, N.: Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. Math. Z. **62**, 400—401 (1955). — [3] Itô, N., u. A. Ohara: Sur les groupes factorisables par deux 2-groupes cycliques. I, II. Proc. Japan Acad. Tokyo **32**, 736—740, 741—743 (1956). — [4] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 15. Mai 1957)

Lorentz, G. G., u. K. Zeller
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 428–438 (1958)

Über Paare von Limitierungsverfahren

Konrad Knopp zum Gedächtnis

Von

G. G. Lorentz und **K. Zeller**

1. Einleitung

Eine Folge $x = \{x_k\}$ heißt limitierbar durch das Matrixverfahren (oder kürzer: die Matrix, das Verfahren) A zum Werte $a = A\text{-}\lim x$, wenn alle Zahlen

$$y_l = x_l^A = x_l(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} x_k \qquad (l = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

im gewöhnlichen Sinne existieren und eine gegen a konvergente Folge bilden.

Das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ einer Matrix A besteht aus allen A-limitierbaren Folgen. Ein Verfahren A ist permanent (oder regulär), wenn es jede konvergente Folge zu ihrem gewöhnlichen Grenzwert limitiert. Zwei Verfahren A, B heißen verträglich, wenn sie niemals ein und derselben Folge verschiedene Grenzwerte zuordnen. Das Verfahren A heißt stärker als B (in Zeichen $A > B$), wenn es alle B-limitierbaren Folgen limitiert. Man beachte, daß hier Verträglichkeit nicht verlangt und die Möglichkeit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ zugelassen wird.

Manchmal betrachten wir nur beschränkte Folgen $x = \{x_k\}$. Diese bilden einen Banach-Raum (m) mit der Norm $||x|| = \sup_k |x_k|$ (außer in Abschnitt 8 wird $||x||$ immer diese Norm bedeuten). Mit $\mathfrak{A}_B$ bezeichnen wir das Wirkfeld von A in (m), d.h. den Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap (m)$. Es ist klar, was z.B. die Feststellung bedeutet: „A und B sind verträglich für beschränkte Folgen."

Wir benützen auch einige Begriffe betreffend starke Limitierbarkeit und Kerne von Folgen. Eine Folge x heißt stark limitierbar durch das Verfahren A zum Werte a, wenn die in (2) auftretenden Zahlen für $l = 0, 1, \ldots$ existieren und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} |x_k - a| \to 0 \qquad (l \to \infty) \tag{2}$$

gilt. Bei permanentem, positivem A ist der starke A-Grenzwert von x eindeutig bestimmt (falls er existiert). Zwei Matrizen A, B sind stark verträglich, wenn aus starker A-Limitierbarkeit der Folge x zum Werte a und starker B-Limitierbarkeit von x zu b die Gleichheit $a = b$ folgt.

Der Kern einer Folge $x = \{x_k\}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Mengen in der komplexen Ebene, die höchstens endlich viele der x_k nicht enthalten. Existieren in (1) alle y_l, so wird der Kern von y auch der A-Kern von x genannt. Zwei (permanente) Verfahren A und B heißen kernverträglich für beschränkte Folgen, wenn für jedes beschränkte x der A-Kern

und der B-Kern einen nichtleeren Durchschnitt besitzen (Lorentz-Robinson [5] benützen eine andere Terminologie). Von zwei (permanenten) Matrizen A und B sagen wir, daß B für beschränkte Folgen kern-stärker als A ist, wenn der B-Kern jeder beschränkten Folge x in deren A-Kern enthalten ist.

Eine permanente Matrix kann nicht zu stark sein, z.B. kann sie nicht alle beschränkten Folgen limitieren. Daher benützt man häufig mehrere Limitierungsverfahren $A, B, \ldots$ gleichzeitig (gewöhnlich wird man die Verträglichkeit dieser Verfahren annehmen). Das führt zu den folgenden Fragen. Sei $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots$ der von endlich vielen Wirkfeldern $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ aufgespannte lineare Raum, d.h. die Menge aller Folgen $z=x+y+\cdots$ mit $x\in\mathfrak{A}$, $y\in\mathfrak{B}, \ldots$. Wie groß kann die Menge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\cdots$ sein? Kann sie z.B. alle beschränkten Folgen umfassen?

Fragen dieser Art wurden aufgeworfen und teilweise beantwortet von Petersen (und Goffman) [7]. Unter anderem konstruiert Petersen zwei für beschränkte Folgen verträgliche, positive, permanente Matrizen A und B, für die es kein positives permanentes C gibt, das für beschränkte Folgen stärker als A und B ist. In dieser Arbeit geben wir allgemeinere Resultate in dieser Richtung (Aussagen über Existenz oder Nichtexistenz eines stärkeren C).

In Satz 1 weisen wir zwei permanente verträgliche Matrizen A und B auf, zu denen es kein permanentes C mit $C>A$, $C>B$ gibt; was darauf beruht, daß A und B sehr schnell wachsende Folgen limitieren. Der Beweis benützt Ergebnisse von Erdös-Piranian [4] über das verschiedene Verhalten von zeilenfiniten und nichtzeilenfiniten Matrizen. Das Beispiel zeigt, daß gewisse Einschränkungen notwendig sind, um positive Resultate zu erhalten. Viele Möglichkeiten stehen hier offen (Betrachtung von zeilenfiniten Matrizen, von Matrizen mit bestimmten Perfektheitseigenschaften, von langsam wachsenden Folgen). In der vorliegenden Arbeit geben wir uns mit der Behandlung beschränkter Folgen zufrieden. Nur Abschnitt 8 (starke Limitierbarkeit) ist ein erster Schritt zur Untersuchung auch unbeschränkter Folgen.

Eigentümlicherweise benötigen wir jedoch für ein positives Ergebnis über Folgen in (m) Zusatzbedingungen, die unbeschränkte Folgen betreffen. Daß solche Bedingungen wesentlich sind, zeigt Satz 2, der ein Beispiel zweier permanenter Matrizen A und B gibt, die für beschränkte Folgen verträglich sind, bei denen es jedoch keine stetige Linearform auf (m) gibt, die sowohl mit $A\text{-}\lim x$ als auch mit $B\text{-}\lim x$ übereinstimmt (in $\mathfrak{A}_B$ bzw. $\mathfrak{B}_B$). Das beruht auf dem Umstand, daß A und B „fast unverträglich" sind, d.h. gewisse im Sinne der Norm von (m) benachbarte Folgen zu ganz verschiedenen Werten limitieren [Singularität (S_1) aus Abschnitt 3]. Bei der Konstruktion von A und B benützen wir einen Gedanken von Petersen [7], um verträgliche Paare von Matrizen mit „embryonaler Fast-Unverträglichkeit" zu finden, und kondensieren dann diese Eigenschaft zu „Fast-Unverträglichkeit".

Die beiden Matrizen in Satz 2 müssen jedoch für gewisse unbeschränkte Folgen unverträglich sein (Satz 3). Das trifft sogar zu, wenn die Singularität (S_1) durch eine schwächere Singularität (S_2) ersetzt wird (s. Abschnitt 5,

Lemma 2). Beim Beweis wird eine Folge x, bei der die Unverträglichkeit auftritt, mittels Kondensation von Singularitäten konstruiert, wobei noch ein Glättungsprozeß nötig ist.

Ein positives Ergebnis erhalten wir schließlich in Satz 4. Wenn zwei permanente Matrizen A, B für alle Folgen verträglich sind, dann gibt es ein permanentes C, das für alle beschränkten Folgen stärker als (und verträglich mit) A und B ist. Beim Beweis benötigen wir Lemma 2, das auf gewisse konvexe Mengen führt; Trennungssätze für konvexe Mengen erlauben die Konstruktion von C. Nachträglich bemerkten wir, daß eine ähnliche Methode von Brudno [3] benützt wurde, um die von ihm in [2], [3] eingeführten Normen von Wirkfeldern zu charakterisieren.

Die Lage ist etwas einfacher bei starker Summierbarkeit (wo wir auch unbeschränkte Folgen zulassen) und Kernvergleich (bezüglich beschränkter Folgen). Hier sind Verträglichkeitseigenschaften von A und B *notwendig und hinreichend* für die Existenz eines stärkeren Verfahrens C. Der Beweis unseres Ergebnisses über Kerne (Satz 6) beruht auf der Trennung konvexer Mengen im Raume (l^1), zu dem die Zeilen permanenter Matrizen gehören. Diesen Kunstgriff findet man schon bei Lorentz und Robinson [5] [1]).

2. Nichtexistenz eines stärkeren Verfahrens

Wir geben ein Beispiel, das teilweise die bei den späteren positiven Ergebnissen vorgenommene Einschränkung auf beschränkte Folgen oder starke Limitierbarkeit rechtfertigt.

Satz 1. *Es gibt zwei permanente verträgliche Matrizen A und B, so daß keine permanente Matrix C gleichzeitig $C > A$ und $C > B$ erfüllt.*

Beweis. Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

und definieren B als permanente Matrix mit den folgenden Eigenschaften: $b_{l,2k} = b_{l,2k+1}$ für alle k und l; jede Spalte von B enthält genau ein nichtverschwindendes Element; jede Zeile von B enthält unendlich viele Nicht-Nullen. Nach Erdös-Piranian [4] (Theorem 2) ist kein zeilenfinites reguläres C stärker als B. Nach Theorem 4 derselben Arbeit ist kein nicht-zeilenfinites C stärker als A. Das vollendet den Beweis, da ja A und B verträglich sind.

3. Nichtexistenz eines stärkeren Verfahrens bei beschränkten Folgen

Verschiedene Ergebnisse der allgemeinen Limitierungstheorie zeigen einen Zusammenhang zwischen der Limitierbarkeit beschränkter und unbeschränkter Folgen bei einer Matrix A; und dieser Zusammenhang kann zum Nachweis

[1]) Die Verfasser sind der U. S. National Science Foundation für großzügige Förderung zu Dank verpflichtet (research grants NSF G1014 und NSF G3468 an Wayne State University).

wesentlicher Eigenschaften von A benützt werden. Zum Beispiel limitiert eine permanente Matrix A gewisse unbeschränkte Folgen, wenn sie eine beschränkt-divergente Folge limitiert. In der vorliegenden Arbeit ergibt der Vergleich von Satz 2 und 3 einen ähnlichen Zusammenhang.

Satz 2. *Es gibt zwei permanente, für beschränkte Folgen verträgliche Matrizen A und B, so daß in (m) keine stetige Linearform existiert, die in $\mathfrak{A}_B$ mit A-lim x und in $\mathfrak{B}_B$ mit B-lim x übereinstimmt.*

Die Behauptung kann auch anders formuliert werden. Wegen der Verträglichkeit von A und B gibt es eine eindeutige Linearform $L(x)$ in $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B$ mit $L(x) = A\text{-lim}\, x$ in $\mathfrak{A}_B$ und $L(x) = B\text{-lim}\, x$ in $\mathfrak{B}_B$. Aber dieses $L(x)$ ist nicht stetig bezüglich der Normtopologie in (m).

Beweis. Es genügt, zwei permanente Matrizen A und B zu konstruieren, die für beschränkte Folgen verträglich sind und die folgende Singularität aufweisen:

(S_1) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es Folgen $x \in \mathfrak{A}_B$, $y \in \mathfrak{B}_B$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ und $|A\text{-lim}\, x - B\text{-lim}\, y| > 1$.

Der Ausgangspunkt unserer Konstruktion sind die folgenden (2×3)-Blocks (mit kleinem $\varrho > 0$):

$$A(\varrho) = \begin{pmatrix} 1-\varrho & \varrho & 0 \\ 1-\varrho & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \qquad B(\varrho) = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 1-\varrho \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ähnliche Blocks wurden von Petersen [7] benützt. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Blocks sind: Jeder transformiert $(1,1,1)$ in $(1,1)$; weiter führt A das Tripel $(1,0,0)$ in $(1-\varrho, 1-\varrho)$ über und B das Tripel $(1, \varrho, 0)$ in (ϱ, ϱ), so daß zwei benachbarte Tripel in zwei ganz verschiedene (und konstante[2]) Paare transformiert werden; wird ein Tripel sowohl von A als auch von B in ein konstantes Paar übergeführt, muß es von der Form (σ, σ, σ) sein. Unter Benützung dieser Blocks ist es leicht, zwei Matrizen A und B zu konstruieren, die die Singularität (S_1) für ein festes $\varepsilon > 0$ besitzen.

Für unseren Zweck ist jedoch ein verfeinerter Kondensationsprozeß erforderlich. Mit $A_n^{2^m}$ bezeichnen wir einen $(2m \times 3)$-Block, der jede Zeile von $2^{-n} A(4^{-n})$ genau m Male enthält. Die Zeilen werden dabei so angeordnet, daß in den Zeilen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1^4 & A_2^4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_1^8 & A_2^8 & A_3^8 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

jede Kombination der Zeilen von $2^{-1} A(4^{-1})$ und $2^{-2} A(4^{-2})$ zu finden ist, und jede Kombination der Zeilen von $2^{-1} A(4^{-1})$, $2^{-2} A(4^{-2})$, $2^{-3} A(4^{-3})$, usw. Ausgehend von $B(\varrho)$ wird die Matrix B in genau derselben Weise definiert.

A und B sind offenbar regulär. Unter Verwendung der Eigenschaften der Blocks erkennen wir, daß es zu jedem $\varrho = 4^{-n}$ eine Folge gibt, die aus Tripeln

[2]) Wir nennen ein Paar (x, y) konstant, wenn $x = y$ gilt.

$(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ besteht sowie A-limitierbar zum Werte $2^{-n}(1-\varrho)$ ist, und eine Folge y, die in ganz entsprechender Weise sich aus Tripeln $(0, 0, 0)$ und $(1, \varrho, 0)$ zusammensetzt und von B zum Werte $2^{-n}\varrho$ limitiert wird. Wir haben $\|x-y\| = \varrho = 4^{-n}$; und die Differenz von A-lim x und B-lim y ist nahe bei 2^{-n}. Daher besitzen die Matrizen A, B die Singularität (S_1) und wir müssen nur noch ihre Verträglichkeit nachweisen.

N_p bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen k, für die in der k-ten Spalte von A Elemente aus dem Block A_p^{2m} stehen. Die Mengen N_p sind paarweise fremd. Nun betrachten wir die „Teiltransformation"

$$y_l^{(p)} = \sum_{k \in N_p} a_{lk} x_k. \tag{3}$$

Für jede beschränkte A-limitierbare Folge x und jedes p gilt

$$x_{3n+1} - x_{3n+2} \to 0 \qquad \text{für } 3n \in N_p \text{ und } n \to \infty. \tag{4}$$

Wenn nämlich $|x_{3n+1} - x_{3n+2}| = \delta > 0$ für ein festes n mit $3n \in N_p$ gilt, können wir in A zwei Zeilen finden, die beide denselben Block A_p^{2m} treffen und für deren Nummern l, l' gilt $|y_l^{(p)} - y_{l'}^{(p)}| = 2^{-p} 4^{-p} \delta$. Wegen der bei der Konstruktion von A benützten Vorschrift über die Kombination der Zeilen aus den Blocks haben wir dann in A auch zwei Zeilen, die wiederum denselben Block A_p^{2m} treffen und für deren Nummern λ, λ' gilt $|y_\lambda - y_{\lambda'}| = |y_l^{(p)} - y_{l'}^{(p)}|$. Daher würde aus $\overline{\lim} |x_{3n+1} - x_{3n+2}| = \delta > 0$ (für $3n \in N_p$ und $n \to \infty$) folgen, daß die Oszillation der A-Transformierten von x mindestens $8^{-p}\delta$ ist, im Widerspruch zur A-Limitierbarkeit von x.

Wenn nun die Folge x auch B-limitierbar ist, so erhalten wir in ähnlicher Weise, unter Benutzung von (4) und der Eigenschaften von $B(\varrho)$,

$$x_{3n} - x_{3n+2} \to 0 \qquad \text{für } 3n \in N_p \text{ und } n \to \infty.$$

Daher gilt für jedes p

$$\sum_{k \in N_p} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \to 0 \qquad \text{für } l \to \infty. \tag{5}$$

Überdies ist

$$\sum_{k \notin N_1, \ldots, N_r} (|a_{lk}| + |b_{lk}|) \leq 2^{-r+1} \quad (l = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

so daß wegen (5) und (6) für jedes r

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \right| \leq \left| \sum_{k \in N_1, \ldots, N_r} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \right| + 2^{-r+1} \|x\|$$
$$= o(1) + 2^{-r+1} \|x\| \qquad (l \to \infty)$$

gilt, was die Verträglichkeit von A und B für beschränkte Folgen beweist.

4. Die Formulierung der Verträglichkeitssätze

Die in Satz 2 konstruierte Singularität kann nur vorkommen, wenn die Verfahren A und B unverträglich sind:

Satz 3. *Zwei permanente Matrixverfahren A und B sind unverträglich, wenn sie die Singularität (S_1) besitzen.*

Wenn A und B verträglich sind (für alle Folgen), können wir die Existenz einer stetigen Linearform $L(x)$ in (m) zeigen, die $A\text{-}\lim x$ und $B\text{-}\lim x$ auf $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B$ fortsetzt. Darüber hinaus gilt sogar:

Satz 4. *Sind A und B permanente verträgliche Matrixverfahren, so gibt es ein permanentes Matrixverfahren C, das mit A und B für beschränkte Folgen verträglich ist und dessen Wirkfeld $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B$ enthält.*

Satz 3 wird sich aus dem untenstehenden Lemma 2 ergeben, während der Beweis von Satz 4 zusätzlich die Betrachtung gewisser konvexer Mengen erfordert.

5. Einige Lemmata

Wir beginnen mit einem einfachen Lemma, das besagt, daß permanente Matrizen zu zeilen- und spaltenfiniten Matrizen „gestutzt" werden können, ohne ihr Verhalten bezüglich beschränkten Folgen zu ändern.

Lemma 1. *A und B seien permanente Matrizen. Dann gibt es eine Folge $\varrho_k \nearrow \infty$ und zwei Folgen natürlicher Zahlen $p_l \nearrow \infty$, $r_l \nearrow \infty$ mit $p_l < r_l$, so daß folgendes gilt. Sind A', B' die Matrizen, die aus A, B entstehen, indem man die Elemente a_{lk}, b_{lk} mit $k < p_l$ und die mit $k \geqq r_l$ durch Null ersetzt, so bestehen für jede Folge x_k mit $x_k = O(\varrho_k)$ die Beziehungen*

$$x_l^A - x_l^{A'} \to 0, \qquad x_l^B - x_l^{B'} \to 0 \qquad (l \to \infty). \tag{7}$$

Beweis. Es genügt, die Zahlen ϱ_k so langsam gegen ∞ gehen zu lassen, daß alle Reihen $\sum_k |a_{lk}| \varrho_k$, $\sum_k |b_{lk}| \varrho_k$ konvergieren, und dann p_l, r_l so zu wählen, daß

$$\sum_{k<p_l} |a_{lk}| \varrho_k \to 0, \qquad \sum_{k \geq r_l} |a_{lk}| \varrho_k \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

gilt, sowie die entsprechenden Beziehungen mit b_{lk} statt a_{lk} bestehen.

Lemma 2. *A und B seien permanente Matrixverfahren und ϱ_k, p_l, r_l gemäß Lemma 1 gewählt. Weiter mögen A und B die folgende Singularität besitzen:*

(S_2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $M = M(\varepsilon)$ und ein $m = m(\varepsilon)$ derart, daß für jedes $n > m$ zwei Folgen $x = x(\varepsilon, n)$, $y = y(\varepsilon, n)$ existieren mit den Eigenschaften

$$\|x\| + \|y\| < M, \tag{8}$$

$$|x_k + y_k - 1| < \varepsilon \qquad \text{für } m \leqq k < n, \tag{9}$$

$$|x_l^A| + |y_l^B| < \varepsilon \qquad \text{für alle } l \text{ mit } m \leqq p_l, r_l < n. \tag{10}$$

Dann sind A und B nicht verträglich, nicht einmal für Folgen $x_k = O(\varrho_k^*)$ bei beliebig vorgegebenen $\varrho_k^* \nearrow \infty$.

Bemerkung. Erfüllen zwei Folgen x, y mit $a = A\text{-}\lim x$ und $b = B\text{-}\lim y$ die Eigenschaft (S_1) für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$, so befriedigen die Folgen $x' = (x-a)/(b-a)$, $y' = (b-y)/(b-a)$ die in (S_2) genannten Ungleichungen für dasselbe ε und beliebiges n, wenn wir nur M und m geeignet wählen [M so groß, daß (8), m so groß, daß (10) gilt]. Daher ist (S_1) eine stärkere Singularität als (S_2) und somit folgt Satz 3 aus Lemma 2.

Beweis. Wir dürfen $\varrho_k^* \leqq \varrho_k$ voraussetzen, und wegen Lemma 1 können wir annehmen, daß $a_{lk} = b_{lk} = 0$ für $k < p_l$ und für $k \geqq r_l$ ist. Wir wählen eine Folge von natürlichen Zahlen $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_i < \cdots$, die so rasch wächst, daß jedes Intervall $\langle p_l, r_l)$ höchstens zwei der Intervalle $\langle q_i, q_{i+1})$ trifft.

Wir wählen Zahlen $\varepsilon_j \searrow 0$ und erhalten gemäß Lemma 2 Zahlen $M_j = M(\varepsilon_j)$, von denen wir monotones Wachstum voraussetzen dürfen. Dann bestimmen wir Zahlen m_j, die eine monotone Teilfolge der q_i bilden, auf induktiven Wegen. Wir wählen $m_j = q_{i(j)} \geqq m(\varepsilon_j)$ so groß, daß

$$M_j \leqq \varrho_k^* \quad \text{für } k \geqq m_j, \tag{11}$$

$$\frac{M_j}{s(j) - 1} < \varepsilon_j \qquad [\text{mit } s(j) = i(j+1) - i(j) > 1] \tag{12}$$

gilt. Dann setzen wir $n_j = m_{j+2}$. Zu diesen $\varepsilon_j, M_j, m_j, n_j$ gibt es gemäß (S_2) [Formeln (8) bis (10)] passende Folgen $x^{(j)}, y^{(j)}$. Wir möchten aus diesen zwei (möglicherweise unbeschränkte) Folgen x, y zusammenstellen, die die Unverträglichkeit von A und B darlegen. Eine direkte Interpolation $x_k = x_k^{(j)}$ für $m_j \leqq k < m_{j+1}$ würde nicht zum Ziele führen, da wir nun nicht zeigen könnten, daß

$$x_l^A = \sum_{p_l \leqq k < r_l} a_{lk} x_k \tag{13}$$

auch dann klein ist, wenn ein m_j im Intervall $\langle p_l, r_l)$ liegt.

Diese Schwierigkeit beseitigen wir durch einen Glättungsprozeß. Sei

$$w_k = \frac{i - i(j)}{s(j) - 1} \quad \text{für } k \in \langle q_i, q_{i+1}) \subset \langle m_j, m_{j+1}), \tag{14}$$

also $0 \leqq w_k \leqq 1$. Wir setzen

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leqq k < m_1 \\ (1 - w_k)\, x_k^{(j-1)} + w_k\, x_k^{(j)} & \text{für } m_j \leqq k < m_{j+1} \end{cases}$$

und definieren die y_k entsprechend, mit $y_k^{(j)}$ an Stelle von $x_k^{(j)}$. Wegen (11) und (14) ist dann $|x_k| \leqq \varrho_k^*$, $|y_k| \leqq \varrho_k^*$ für $k \geqq m_1$.

Zum Nachweis der Kleinheit von x_l^A wählen wir i und j so, daß

$$\langle p_l, r_l) \subset \langle q_{i-1}, q_{i+1}) \quad \text{und} \quad \langle q_i, q_{i+1}) \subset \langle m_j, m_{j+1})$$

st. Im Falle $q_i = m_j$ (und $j > 1$) gilt $x_k = x_k^{(j-1)}$ (für k in $\langle q_{i-1}, q_{i+1})$) und daher $|x_l^A| = |x_l^{j-1}(A)| < \varepsilon_{j-1}$ wegen $m_{j-1} < q_{i-1} \leqq p_l < r_l < q_{i-1} < m_{j+1} = n_{j-1}$. Ist aber $q_i > m_j$, so gilt $x_k = (1 - w_k)\, x_k^{(j-1)} + w_k\, x_k^{(j)}$ (für k in $\langle q_{i-1}, q_{i+1})$), wobei sich w_k von $w = w_{q_i}$ um höchstens $1/(s(j) - 1) < \varepsilon_j / M_j$ unterscheidet. Also unterscheidet sich $x_l(A)$ von

$$\sum_{p_l \leqq k < r_l} a_{lk} \{(1 - w)\, x_k^{(j-1)} + w\, x_k^{(j)}\} = (1 - w)\, x_l^{(j-1)}(A) + w\, x_l^{(j)}(A) \tag{15}$$

um höchstens $2\varepsilon_j \sum_k |a_{lk}| \leqq \Omega\, \varepsilon_j$. Wegen $m_{j-1} \leqq p_l < r_l < n_{j-1}$ haben wir $|x_l^{(j-1)}(A)| < \varepsilon_{j-1}$. Ebenso folgt $|x_l^{(j)}(A)| < \varepsilon_j \leqq \varepsilon_{j-1}$. Daher gilt in jedem

Fall $|x_l^A| \leqq \varepsilon_{j-1} + \Omega\varepsilon_j \to 0$ für $l \to \infty$. Genauso zeigen wir $y_l^B \to 0$. Da ja $x_k + y_k \to 1$ gilt, haben wir $x_l^B \to 1$, so daß A und B die Folge x zu verschiedenen Werten limitieren. Das vollendet den Beweis.

Enthält das Wirkfeld einer (permanenten) Matrix A für beliebig gegebenes $\varrho_k \nearrow \infty$ Folgen $x_k = O(\varrho_k)$, so enthält es auch gewisse beschränkt-divergente Folgen (WILANSKY-ZELLER [8]). Im Gegensatz dazu können zwei (permanente) Matrizen A und B, wie Satz 2 und Lemma 2 zeigen, für beschränkte Folgen verträglich, für beliebig langsam wachsende Folgen aber unverträglich sein.

Bemerkung. Lemma 2 kann auf eine beliebige endliche Anzahl von Verfahren erweitert werden. Für drei Verfahren A, B, C zum Beispiel bedeutet die Singularität (S_2) die Existenz dreier Folgen $x(\varepsilon, n)$, $y(\varepsilon, n)$, $z(\varepsilon, n)$, die folgende Bedingungen erfüllen: $||x|| - ||y|| + ||z|| < M$; $|x_k + y_k + z_k - 1| < \varepsilon$ für $m \leqq k < n$; $|x_l^A| + |y_l^B| + |z_l^C| < \varepsilon$ für $m \leqq p_l$, $r_l < n$. Die Folgerung von Lemma 2 ist dann die Existenz von drei Folgen x, y, z beliebig langsamen Wachstums, die beziehungsweise A-, B-, C-limitierbar zum Werte Null sind, aber $x_k + y_k + z_k \to 1$ erfüllen.

6. Beweis des Satzes 4

Wir dürfen annehmen, daß A, B die Eigenschaften der Matrizen A', B' aus Lemma 1 besitzen (also „gestutzt" sind). Da A und B verträglich sind, ist die Voraussetzung von Lemma 2 nicht erfüllt. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jedem Paar M, m ein n existiert mit der Eigenschaft, daß (8), (9), (10) nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Wir nehmen $M = m$ und bezeichnen mit $n(m)$ das entsprechende n.

Wir bemerken zunächst: Ist X ein Vektorraum und $\varrho(x, y)$ eine Halbnorm in $X \times X$, so ist $\varrho(z) = \inf_{z=x+y} \varrho(x, y)$ eine Halbnorm in X. — Im endlichdimensionalen Raum $R(m)$ der Folgen $z = \{0, \ldots, 0, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{n-1}, 0, \ldots\}$ [wo $n = n(m)$] definieren wir

$$(16) \qquad \varrho_m(z) = \inf_{x-y=z} \left| \frac{1}{\varepsilon} \sup_{m \leqq p_l,\, r_l < n} \{|x_l^A| + |y_l^B|\} + \frac{1}{M} \sup_{m \leqq k < n} \{|x_k| + |y_k|\} \right|.$$

Dieser Ausdruck ist eine Norm in $R(m)$. Wegen der Wahl von n gehört die Folge $z_0 = \{z_{0k}\}$ mit $z_{0k} = 1$ für $m \leqq k < n$ und $= 0$ sonst nicht zu der Einheitskugel $\varrho_m(z) < 1$ in $R(m)$. Nach dem Hahn-Banachschen Theorem existiert daher in $R(m)$ (versehen mit der Norm ϱ_m) eine Linearform

$$L_m(z) = \sum_{m \leqq k < n} c_{mk} z_k$$

mit $||L_m|| \leqq 1$ und $L(z_0) = 1$.

Wenn wir nun zusätzlich $c_{mk} = 0$ für $k < m$ und für $k \geqq n$ setzen, so hat die Matrix $C = \{c_{lk}\}$ die Eigenschaften $\sum_k c_{lk} = 1$ für $l = 0, 1, \ldots$ und $\lim_l c_{lk} = 0$ für $k = 0, 1, \ldots$. Sei z eine beschränkte Folge, die von A zu Null limitiert wird. Dann ist $|z_l^A| < \delta$ für alle großen l; und für die Projektion $\bar{z}$ von z auf

$R(m)$ gilt $\varrho_m(\bar{z}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{||z||}{m}$ für alle großen m wegen (16). Somit haben wir

$$\left|\sum_k c_{m\,k} z_k\right| = |L_m(\bar{z})| \leq \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{||z||}{m},$$

so daß z von C zum Werte Null limitiert wird.

Weiter folgt nun, daß C permanent ist und jede beschränkte A-limitierbare (oder auch B-limitierbare) Folge limitiert. Schließlich ist C nach einem allgemeinen Satz von BRUDNO [2] (s. auch PETERSEN [6]) mit A und B verträglich für beschränkte Folgen.

Satz 4 kann auf eine beliebige endliche Anzahl von Verfahren ausgedehnt werden, wenn die Verträglichkeit geeignet definiert wird. Zum Beispiel nennen wir drei Verfahren A, B, C *simultan verträglich,* wenn aus $x+y+z=0$ mit $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{B}$, $z \in \mathfrak{C}$ stets folgt $A\text{-lim}\, x + B\text{-lim}\, y + C\text{-lim}\, z = 0$; d.h. wenn es eine (nicht notwendig stetige) Linearform in $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$ gibt, die die A-, B- und C-Limites fortsetzt. Wir formulieren:

Satz 4*. *Sind die permanenten Matrixverfahren A, B, C simultan verträglich, so gibt es ein permanentes Matrixverfahren D, das für beschränkte Folgen stärker als und verträglich mit A, B, C ist.*

Der Beweis bleibt im wesentlichen derselbe wie bei Satz 4, unter geeigneter Abänderung der Definition der Normen (16) und Verwendung der in Abschnitt 5 erwähnten Variante von Lemma 2.

Es ist zu erwähnen, daß A, B, C paarweise verträglich sein können, ohne simultan verträglich zu sein. Drei von PETERSEN [7] konstruierte Verfahren, die $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B + \mathfrak{C}_B = (m)$ erfüllen, weisen diese Singularität auf.

Natürlich ist für Satz 4 die Voraussetzung der Verträglichkeit wesentlich. Dies zeigen einmal allgemeine Verträglichkeitssätze (BRUDNO [2], PETERSEN [6]), zum andern die beiden durch $A\text{-lim}\, x = \lim x_{2k}$, $B\text{-lim}\, x = \lim x_{2k+1}$ definierten Verfahren, bei denen $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ alle Folgen umfaßt und $\mathfrak{A}_B + \mathfrak{B}_B = (m)$ ist.

7. Starke Limitierbarkeit

Die Methode aus Abschnitt 5 und 6 läßt sich auch bei starker Limitierbarkeit anwenden.

Satz 5. *Zwei permanente positive Matrizen A, B sind genau dann stark verträglich, wenn es eine permanente positive Matrix C gibt, die jede stark A-limitierbare und jede stark B-limitierbare Folge zum selben Wert stark limitiert.*

Lemma 3. *Wenn es zu zwei permanenten positiven Matrizen A und B bei jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $m = m(\varepsilon)$ gibt, so daß bei beliebig großem n zwei positive Folgen x, y existieren mit*

$$x_k + y_k = 1 \qquad (m \leq k < n), \tag{17}$$

$$x_l^A + y_l^B < \varepsilon \qquad (l = 0, 1, \ldots), \tag{18}$$

so sind A und B nicht stark verträglich.

Beweis. Wir wählen eine Folge $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum \varepsilon_j < \infty$. Sei $m_j = m(\varepsilon_j)$; wir dürfen dabei $m_j < m_{j+1}$ annehmen. Dann setzen wir $n_j = m_{j+1}$. Es gibt

positive Folgen $x^{(j)}$ und $y^{(j)}$, die (17) und (18) mit diesen ε_j, m_j, n_j erfüllen. Wir dürfen $x_k^{(j)}=0$ für k außerhalb $\langle m_j, n_j)$ annehmen. Wir setzen

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < m_1, \\ x_k^{(j)} & \text{für } m_j \leqq k < n_j \quad (j = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

und definieren y_k entsprechend. Dann gilt für jedes feste p

$$x_l^A = \sum_{j=1}^{p-1} x_l^{(j)}(A) + \sum_{j=p}^{\infty} x_l^{(j)}(A) \leqq o(1) + \sum_{j=p}^{\infty} \varepsilon_j \qquad (l \to \infty),$$

also $x_l^A \to 0$. Ebenso erhalten wir $y_l^B \to 0$. Daher ist x stark A-limitierbar zum Werte 0 (alle vorkommenden Glieder sind ja nichtnegativ), und somit $\{1-x_k\}$ stark B-limitierbar zum Werte Null, also x stark B-limitierbar zum Werte 1 und daher A und B nicht stark verträglich.

Beweis von Satz 5. Wir müssen nur die Notwendigkeit der Bedingung beweisen. A und B seien stark verträglich. Dann ist die Voraussetzung von Lemma 3 nicht erfüllt. Daher gibt es ein $\varepsilon>0$, so daß für jedes m ein $n=n(m)$ existiert mit der Eigenschaft, daß für positive Folgen x, y die Bedingungen (17) und (18) nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Im Raume $R(m)$ der reellen Folgen $z=\{0, \ldots, 0, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{n-1}, 0, \ldots\}$, den wir in natürlicher Weise als Vektorverband auffassen, definieren wir die Halbnorm

$$\varrho_m(z) = \inf_{\substack{z=x+y \\ x,\, y \geqq 0}} \left[\frac{1}{\varepsilon} \sup_{l=0,1,\ldots} (x_l^A + y_l^B) \right] \qquad [\text{wo } x, y \in R(m)]. \tag{19}$$

Sei $z_0=\{z_{0k}\}$ mit $z_{0k}=1$ für $m \leqq k < n$ und $=0$ sonst. Ist $z \geqq z_0$ in $R(m)$, dann gehört z nicht der durch $\varrho_m(z)<1$ gegebenen Einheitskugel U an. Denn im Falle $z \in U$ gäbe es $x, y \geqq 0$ in $R(m)$ mit $x+y=z$ und $x_l^A + y_l^B < \varepsilon$ $(l=0, 1, \ldots)$; und wir könnten x', $y' \in R(m)$ mit $0 \leqq x' \leqq x$, $0 \leqq y' \leqq y$ und $x'+y'=z_0$ finden. Dann wäre $x_l'(A) + y_l'(B) < \varepsilon$ für alle l und somit $z_0 \in U$, im Widerspruch zur Definition von ε.

Sei K der Kegel (in R_m) aller Elemente $z \geqq z_0$. Wir können U und K in R_m durch eine Hyperebene H trennen, die eine Stützhyperebene für K ist (Bourbaki [1, S. 71]). Dann muß H den Punkt z_0 enthalten. Überdies enthält H nicht den Ursprung, da sonst der im Innern von K gelegene Punkt $\bar{z}$ (wo $\bar{z}_k=2$ für $m \leqq k < n$) zu H gehören würde. Daher können wir die Gleichung von H in der Form $L_m(z)=1$ schreiben, wo

$$L_m(z) = \sum_{m \leqq k < n} c_{mk} z_k.$$

Da $L_m(z) \geqq 1$ in K und $L_m(z_0)=1$, ist hierbei $c_{mk} \geqq 0$ und $\sum_k c_{mk} = 1$. Wie in Abschnitt 5 ergänzen wir nun die Definition von C und vollenden den Beweis.

8. Kern-Verträglichkeit

Wir schließen mit einem Ergebnis, das Satz 4 auf Kerne überträgt. Der zugrunde gelegte Raum, in dem die Trennung konvexer Mengen durchgeführt wird, ist nun der Raum (l^1) der komplexen Folgen $x=\{x_k\}$ mit $\|x\| = \sum_k |x_k| < +\infty$, der jedoch mit reellen Skalaren versehen wird.

Satz 6. *Für zwei permanente Matrixverfahren A und B kann genau eine der folgenden Möglichkeiten auftreten:*

a) A und B sind nicht kern-verträglich für beschränkte Folgen.

b) Es gibt eine permanente Matrix C, die für beschränkte Folgen kern-stärker als A und B ist.

Beweis. Die l-ten Zeilen $a^{(l)}, b^{(l)}$ von A und B betrachten wir als Elemente in (l^1). Mit R_n, R_n' bezeichnen wir die konvexen Hüllen der Mengen $a^{(l)}$ $(l \geqq n)$ bzw. $b^{(l)}$ $(l \geqq n)$. Es gibt zwei Fälle.

a) *Der Abstand $\varrho(R_n, R_n')$ ist ungleich Null für ein bestimmtes n.* Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\varrho(R_n, R_n') \geqq 2\delta$ ist für alle großen n. Wir werden zeigen, daß für eine geeignete stetige Linearform $L(x)$ in (l^1) die folgenden Beziehungen gelten: $L(x) \leqq \lambda$ in R_n und $L(x) \geqq \lambda + \varepsilon$ in R_n' (mit festem $\varepsilon > 0$). Sei R_n'' die δ-Umgebung von R_n'. Da R_n'' eine offene konvexe Menge ist, gibt es nach einem Trennungssatz (Bourbaki [*1*, S. 71]) eine abgeschlossene Hyperebene H mit Gleichung $L(x) = \lambda$, die R_n und R_n'' trennt: $L(x) \leqq \lambda$ in R_n, $L(x) \geqq \lambda$ in R_n''. Die Hyperebene H hat einen Abstand $\geqq \delta$ von R_n'; somit gibt es eine parallele Hyperebene $L(x) = \lambda + \varepsilon$ (mit geeignetem $\varepsilon > 0$), die H und R_n' trennt. Wir haben $L(x) \geqq \lambda + \varepsilon$ in R_n'.

Die Linearform $L(x)$ gestattet eine Darstellung $L(x) = \sum_k (\sigma_k \xi_k + \tau_k \eta_k)$, wo $x_k = \xi_k + i\eta_k$ und σ_k, τ_k beschränkte Folgen sind. Mit $s = \sigma - i\tau$ erfüllen dann die Realteile von s_l^A, s_l^B die Ungleichungen $\operatorname{Re} s_l^A \leqq \lambda$ und $\operatorname{Re} s_l^B \geqq \lambda + \varepsilon$ für $l \geqq n$. Daher sind A- und B-Kern von s fremd.

b) *Sei $\varrho(R_n, R_n') = 0$ für jedes n.* Dann können wir für jedes n Elemente $c^{(n)} = \{c_{nk}\}$ und $d^{(n)} = \{d_{nk}\}$ auswählen, so daß $c^{(n)} \in R_n$, $\|d^{(n)}\| < n^{-1}$ und $c^{(n)} + d^{(n)} \in R_n'$ gilt. Wir bilden die Matrix $C = \{c_{nk}\}$. Da $c^{(n)}$ in der konvexen Hülle von $a^{(n)}, a^{(n+1)}, \ldots$ liegt, sehen wir leicht, daß C eine permanente Matrix und für beschränkte Folgen kern-stärker als A ist. Im selben Sinne ist $C + D$ stärker als B. Da aber D alle beschränkten Folgen zu Null limitiert, gilt diese Stärkebeziehung auch zwischen C und B, w. z. b. w.

Literatur

[*1*] Bourbaki, N.: Elements de Mathematique, Livre V, Chap. I, II. Paris 1953. — [*2*] Brudno, A. L.: Summation of bounded sequences. Mat. Sbornik, N. S. **16**, 191–247 (1945). — [*3*] Brudno, A. L.: Die Normen von Toeplitzschen Feldern. Doklady Akad. Nauk SSSR., N. S. **81**, 11–14 (1953). — [*4*] Erdös, P., and G. Piranian: Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 397–401 (1950). — [*5*] Lorentz, G. G., and A. Robinson: Core-consistency and total inclusion for methods of summability. Canadian J. of Math. **6**, 27–34 (1953). — [*6*] Petersen, G. M.: Summability methods and bounded sequences. J. London Math. Soc. **31**, 324–326 (1956). — [*7*] Petersen, G. M.: Consistent summability methods. J. London Math. Soc. **32**, 62–65 (1957). — [*8*] Wilansky, A., u. K. Zeller: The inverse matrix in summability: reversible matrices. J. London Math. Soc. (im Druck).

University of Michigan (Ann Arbor, Mich.) und Wayne State University (Detroit 2, Mich.)

(Eingegangen am 20. Juni 1957)

Volkmann, B.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 439–449 (1958)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. VI

Von
Bodo Volkmann

1. Eine reelle Zahl ϱ mit $0<\varrho\leqq 1$ heißt bekanntlich *(g-adisch) einfach-normal*, wenn in ihrer g-adischen Entwicklung

$$\varrho=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{g^i} \qquad (g, e_i \text{ ganz},\ g\geqq 2,\ 0\leqq e_i<g;\ \text{unendlich viele } e_i\neq 0) \tag{1}$$

jede der g Anzahlfunktionen

$$A_j(\varrho,n)=\sum_{\substack{i=1\\ e_i=j}}^{n}1 \qquad (j=0,\ldots,g-1)$$

der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_j(\varrho,n)}{n}=\frac{1}{g} \tag{2}$$

genügt. Ferner heißt ϱ *(g-adisch) normal*, wenn die Zahlen $\varrho, g\varrho, g^2\varrho, \ldots$ sämtlich g^k-adisch einfach-normal für jedes natürliche k sind. Da nach Borel [2] fast alle Zahlen ϱ normal (und daher auch fast alle Zahlen einfach-normal) sind, haben spätere Autoren ([1], [5], [3], [8]) gewisse Mengen von nichtnormalen Zahlen untersucht und ihre Hausdorffschen Dimensionen bestimmt. Dabei wurde jedoch bisher immer vorausgesetzt, daß die g Ziffernfrequenzen sämtlich konvergieren; nur im Fall $g=2$ sind Ergebnisse bekannt[1]), die auch Häufungspunkte in Betracht ziehen. Zahlen ϱ, bei denen der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_j(\varrho,n)}{n}$ für jedes j mit $0\leqq j\leqq g-1$ existiert, werden im folgenden als *(g-adisch) einfach-regulär* bezeichnet, und entsprechend der obigen Definition der Normalität nennen wir eine Zahl ϱ *(g-adisch) regulär*, wenn die Zahlen $\varrho, g\varrho, g^2\varrho, \ldots$ sämtlich g^k-adisch einfach-regulär für jedes natürliche k sind*).

2. In der vorliegenden Arbeit werden Mengen von Zahlen ϱ untersucht, bei denen die Forderung der einfachen Regularität nicht mehr gestellt wird. Wir betrachten dazu für jedes ϱ mit $0<\varrho\leqq 1$ die Folge der Punkte[2])

$$\mathfrak{p}_i(\varrho)=\left(\frac{A_0(\varrho,i)}{i},\ldots,\frac{A_{g-1}(\varrho,i)}{i}\right) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

*) (Zusatz bei der Korrektur.) Vgl. dazu auch: Straus, E. G., B. Volkmann and D. D. Wall: On normality and regularity of numbers. Erscheint im Pacif. Journ. Math.

[1]) Siehe z. B. [6], Satz 52.

[2]) Die Koordinaten eines Punktes im R_g numerieren wir von 0 bis $g-1$.

und bezeichnen durchweg die Menge der Häufungspunkte von $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ mit $V(\varrho)$. Dann lassen sich die obigen Definitionen auch so ausdrücken: Eine Zahl ϱ heißt einfach-regulär, wenn $V(\varrho)$ nur aus einem Punkt besteht, und einfach-normal, wenn dies der Punkt $\left(\frac{1}{g}, \frac{1}{g}, \ldots, \frac{1}{g}\right)$ ist. Bezeichnen wir mit H das $(g-1)$-dimensionale Simplex, in dem sich die Hyperebene $\sum_{j=0}^{g-1} x_j = 1$ und der Einheitswürfel $\{0 \leqq x_j \leqq 1\}$ $(j = 0, \ldots, g-1)$ durchschneiden, so gilt offenbar $V(\varrho) \subseteqq H$ für jedes ϱ. Im folgenden wird zunächst bewiesen, daß jede solche Häufungspunktmenge $V(\varrho)$ ein Kontinuum[3]) ist (Satz 1) und danach die Hausdorffsche Dimension der Menge aller ϱ mit vorgegebenem $V(\varrho)$ bestimmt (Satz 2). Dabei zeigt sich, daß jedes Kontinuum V mit $V \subseteqq H$ wirklich als $V(\varrho)$ für gewisse ϱ auftritt. Schließlich wird der Fall behandelt, wo man von der Menge $V(\varrho)$, statt sie genau vorzuschreiben, nur verlangt, daß sie Unter- bzw. Obermenge einer gegebenen Menge sein soll (Sätze 3 und 4). Im Fall $g = 2$, wo somit die Menge $V(\varrho)$ immer aus einem abgeschlossenen Intervall oder aus einem einzigen Punkt besteht, wurde Satz 1 schon früher bewiesen ([6], Satz 2), während die übrigen Sätze für alle $g \geqq 2$ neu sind.

3. Als unmittelbare Folgerungen aus der Definition der einfachen Regularität ergeben sich folgende Aussagen:

1) *Ist N die Menge aller einfach-normalen und E die Menge aller einfach-regulären ϱ, so ist $N < E$.*

2) *Die Menge $E - N$ hat das Maß 0 und die Hausdorffsche Dimension 1.*

Denn für jedes α mit $0 < \alpha < 1$ gibt es ein $\zeta \neq \frac{1}{g}$, so daß die Menge G der ϱ mit $\lim_{i \to \infty} \frac{A_0(\varrho, i)}{i} = \zeta$ eine Dimension $\dim G > \alpha$ hat ([3]), und es ist $G \subseteqq E - N$.

3) *Alle rationalen Zahlen sind g-adisch einfach-regulär (und sogar regulär) für jedes g; dagegen ist keine rationale Zahl für jedes g einfach-normal.*

Denn es gibt zu rationalem ϱ solche g, bei denen in der Entwicklung (1) nur eine Ziffer unendlich oft auftritt.

4) *Die Eigenschaft der einfachen Regularität einer Zahl ϱ hängt von der Wahl von g ab.*

Sei z. B. $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ eine dyadisch nicht einfach-reguläre Zahl. Dann ersetze man in ihrer Ziffernfolge jede Null durch die Sequenz 0123456789, jede Eins durch die Sequenz 9876543210. Die so entstehende Ziffernfolge ϱ, als Dezimalbruch aufgefaßt, ist einfach-regulär (und sogar einfach-normal) für $g = 10$, nicht dagegen einfach-regulär für $g = 10^{10}$.

4. Folgende Bezeichnungen und Hilfssätze werden später benötigt:

1) Das α-dimensionale Hausdorffsche Maß einer Punktmenge I bezeichnen wir mit $\{I\}^{\alpha}$, ihre Hausdorffsche Dimension mit $\dim I$.

[3]) Das heißt eine abgeschlossene, zusammenhängende Menge.

2) Den Abstand zwischen zwei Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, einem Punkt $\mathfrak{p}$ und einer Menge I oder zwischen zwei Mengen I und J bezeichnen wir mit

$$\delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}), \quad \delta(\mathfrak{p}, I), \quad \text{bzw.} \quad \delta(I, J).$$

3) Ist M eine Punktmenge und $\varepsilon > 0$, so bezeichnen wir mit M^ε die Menge der Punkte $\mathfrak{x}$ mit $\delta(\mathfrak{x}, M) \leq \varepsilon$.

4) Mit L_n bezeichnen wir das g-dimensionale Gitter mit der Maschenweite $\frac{1}{n}$, d.h. die Menge aller Punkte der Form $\mathfrak{x} = \left(\frac{x_0}{n}, \ldots, \frac{x_{g-1}}{n}\right)$ mit ganzen x_j. Eine Teilmenge Z von L_n heiße c-zusammenhängend, wenn sich aus ihren Punkten eine Folge $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ bilden läßt, in der jeder mindestens einmal vorkommt und $\delta(\mathfrak{z}_\nu, \mathfrak{z}_{\nu+1}) \leq c$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gilt. Offenbar ist das Gitter L_n selbst $\frac{1}{n}$-zusammenhängend, die Menge $L_n \frown H$ dagegen nur $\frac{\sqrt{2}}{n}$-zusammenhängend.

5) Unter einem Grundintervall n-ter Stufe verstehen wir wie in [9] ein Intervall der Form

$$\nu g^{-n} < \varrho \leq (\nu + 1) g^{-n} \qquad (0 \leq \nu < g^n;\ \nu \text{ ganz}).$$

6) Jeder Ziffernsequenz $E = e_1 \ldots e_n$ ordnen wir den Punkt $\mathfrak{p}(E) = \left(\frac{k_0}{n}, \ldots, \frac{k_{g-1}}{n}\right)$ in H zu, wobei k_j die Anzahl der i mit $e_i = j$ ist. Dann gilt der

Hilfssatz 1. *Seien E_1 und E_2 Sequenzen der Längen n_1 und n_2 mit*

$$\mathfrak{p}(E_i) = \mathfrak{x}_i = (x_{0i}, \ldots, x_{g-1\,i}) \qquad (i = 1, 2).$$

Dann ist

$$\mathfrak{p}(E_1 E_2) = \frac{n_1 \mathfrak{x}_1 + n_2 \mathfrak{x}_2}{n_1 + n_2}.$$

Insbesondere liegt also $\mathfrak{p}(E_1 E_2)$ auf der Strecke zwischen $\mathfrak{p}(E_1)$ und $\mathfrak{p}(E_2)$.

Beweis. Die Sequenz $E_1 E_2$ hat die Länge $n_1 + n_2$ und enthält die Ziffer j gerade $(n_1 x_{j1} + n_2 x_{j2})$ mal.

7) Für die oben eingeführte Punktfolge $\mathfrak{p}_i(\varrho)$ gilt der

Hilfssatz 2. *Sei $0 < \varrho \leq 1$. Dann ist*

$$\delta\left(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_{i+1}(\varrho)\right) \leq \frac{\sqrt{g}}{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Offenbar gilt

$$\delta\left(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_{i+1}(\varrho)\right) = \sqrt{\sum_{j=0}^{g-1} \left(\frac{A_j(\varrho, i)}{i} - \frac{A_j(\varrho, i+1)}{i+1}\right)^2}$$

und ferner

$$\left|\frac{A_j(\varrho, i)}{i} - \frac{A_j(\varrho, i+1)}{i+1}\right| = \begin{cases} \left|\frac{A_j(\varrho, i)}{i} - \frac{A_j(\varrho, i)+1}{i+1}\right| = \frac{|A_j(\varrho, i) - i|}{i(i+1)} \leq \frac{1}{i+1} \\ A_j(\varrho, i)\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{A_j(\varrho, i)}{i(i+1)} \leq \frac{1}{i+1}, \end{cases}$$

je nachdem ob in (1) $e_{i+1} = j$ oder $e_{i+1} \neq j$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

8) Wird für jeden Punkt $\mathfrak{x}=(x_0, \ldots, x_{g-1}) \in H$ die Funktion

$$d(\mathfrak{x}) = d(x_0, \ldots, x_{g-1}) = \frac{\sum_{j=0}^{g-1} x_j \log x_j}{\log \frac{1}{g}} \qquad (,,0 \log 0'' = 0)$$

definiert, so gilt der[4])

Hilfssatz 3. *Sei n eine natürliche Zahl, $\mathfrak{x}=(x_0, \ldots, x_{g-1}) \in H$ und x_0^* so gewählt, daß $x_0^* n = n - \sum_{j=1}^{g-1} [x_j n]$ (und folglich $\lim_{n\to\infty} x_0^* = x_0$) ist. Dann wird beim Grenzübergang $n \to \infty$*

$$\frac{n!}{(x_0^* n)! [x_1 n]! \ldots [x_{g-1} n]!} = g^{n(d(\mathfrak{x})+o(1))}.$$

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel ist für $0<j\leqq g-1$

$$[x_j n]! = \sqrt{2\pi [x_j n]} \left(\frac{[x_j n]}{e}\right)^{[x_j n]} (1+o(1)) = g^{n\left(\frac{x_j \log x_j n}{\log g} + o(1)\right)} e^{-[x_j n]}$$

und folglich

$$\frac{n!}{(x_0^* n)! [x_1 n]! \ldots [x_{g-1} n]!} = g^{n\left(\frac{\log n}{\log g} + d(\mathfrak{x}) - \frac{\log n}{\log g} \sum_{j=0}^{g-1} x_j + o(1)\right)} = g^{n(d(\mathfrak{x})+o(1))}.$$

5. Es gilt der

Satz 1. *Für jedes ϱ ist die Menge $V(\varrho)$ ein Kontinuum.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit der Menge $V(\varrho)$ folgt aus ihrer Definition als Ableitung der Punktmenge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$. Es werde nun angenommen, $V(\varrho)$ wäre nicht zusammenhängend, ließe sich also in zwei Teilmengen V_1 und V_2 von positivem Abstand δ zerlegen. Dann sei R die Menge der Punkte in H, die sowohl von V_1 als auch von V_2 wenigstens den Abstand $\delta/3$ haben. Da für alle genügend großen i nach Hilfssatz 2 offenbar $\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_{i+1}(\varrho)) < \frac{\delta}{3}$ ist und andererseits die Folge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ sowohl in $V_1^{\delta/3}$ als auch in $V_2^{\delta/3}$ unendlich viele Punkte hat, hat sie ebenfalls in R unendlich viele Punkte. Folglich liegt wegen der Abgeschlossenheit und Beschränktheit von R auch wenigstens ein Häufungspunkt von $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ in R — entgegen der Voraussetzung, daß $V(\varrho) = V_1 \cup V_2$ sein sollte.

6. Als Umkehrung von Satz 1 beweisen wir den

Satz 2. *Sei V ein Kontinuum mit $V \subseteqq H$. Dann gibt es Zahlen ϱ mit $V(\varrho) = V$, und für die Menge $G(V)$ dieser ϱ ist*

$$\dim G(V) = \min_{\mathfrak{x} \in V} d(\mathfrak{x}).$$

[4]) Vgl. [8], Nr. 2.

Beweis. Da die Funktion $d(\mathfrak{x})$ in H stetig und die Menge V abgeschlossen ist, gibt es Punkte in V, wo sie ihr Minimum bezüglich V annimmt. Ein solcher Punkt sei $\mathfrak{z}=(z_0, \ldots, z_{g-1})$. Ferner setzen wir $V^{\sqrt{g}/n} \cap H = V_n$, so daß $V_n \supseteq V_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ gilt. Die Menge $L_n \cap V_n$ ist dann $\frac{2\sqrt{g}}{n}$-zusammenhängend, wie man folgendermaßen einsieht:

Seien $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zwei beliebige Punkte von $L_n \cap V_n$. Dann gibt es Punkte $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \subseteq V$ mit $\delta(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{x}_i) \leq \frac{\sqrt{g}}{n}$ $(i=1, 2)$. Man kann dann, da die Menge V zusammenhängend ist, eine $(g-1)$-dimensionale Kugel K vom Radius $\frac{\sqrt{g}}{n}$ so stetig bewegen, daß ihr Mittelpunkt von $\mathfrak{v}_1$ nach $\mathfrak{v}_2$ geführt wird und nur Punkte von V durchläuft. Ist W_n die Menge der Punkte von V_n, die dabei von der Kugel K überdeckt werden, so ist $\mathfrak{x}_1 \in W_n$, $\mathfrak{x}_2 \in W_n$, und offenbar kann jeder Punkt von W_n, der bei irgendeiner Lage der Kugel K auf ihrem Rand liegt, mit jedem Punkt von $L_n \cap V_n$ in ihrem Innern durch eine Strecke einer Länge $< \frac{2\sqrt{g}}{n}$ verbunden werden. Daher gibt es in W_n einen Streckenzug von $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{x}_2$ mit Strecken, die kürzer als $\frac{2\sqrt{g}}{n}$ sind und deren Endpunkte sämtlich zu L_n gehören.

Wir bilden nun aus den Punkten $\mathfrak{x} \in L_n \cap V_n$ eine endliche Folge $\mathfrak{X}_n = \{\mathfrak{x}_{n1}, \mathfrak{x}_{n2}, \ldots, \mathfrak{x}_{nq_n}\}$ derart, daß jeder von ihnen mindestens einmal in $\mathfrak{X}_n$ vorkommt; ferner soll gelten:

$$\delta(\mathfrak{x}_{nm}, \mathfrak{x}_{nm+1}) \leq \frac{2\sqrt{g}}{n} \qquad (m=1, \ldots, q_n-1) \tag{3}$$

(dies ist nach obigen Überlegungen möglich) und

$$\delta(\mathfrak{x}_{n1}, \mathfrak{z}) \leq \frac{1}{n}, \qquad \delta(\mathfrak{x}_{nq_n}, \mathfrak{z}) \leq \frac{1}{n} \tag{4}$$

(was erfüllbar ist, da nach Definition von V_n Punkte von $L_n \cap V_n$ in der $\frac{1}{n}$-Umgebung von $\mathfrak{z}$ liegen). Dann sei $\mathfrak{X}$ die Punktfolge, die durch Aneinandersetzen von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots$ entsteht. Mit Hilfe von $\mathfrak{X}$ wird nunmehr eine Punktmenge $M \subseteq H$ konstruiert, für die einerseits $M \subseteq G(V)$ und andererseits $\dim M \geq d(\mathfrak{z})$ gilt.

Im Fall $d(\mathfrak{z})=0$ leistet die leere Menge das Verlangte. Sei also $d(\mathfrak{z})>0$. Dann bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{x}_{nm} \in \mathfrak{X}_n$ mit $\frac{k_{0nm}}{n}, \ldots, \frac{k_{g-1nm}}{n}$, ferner mit $\mathfrak{E}_{nm}$ die Menge aller g-adischen Ziffernsequenzen E_{nm} der Länge n mit $\mathfrak{p}(E_{nm}) = \mathfrak{x}_{nm}$. Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{E}_{nm}$ ist demnach

$$\frac{n!}{k_{0nm}! \ldots k_{g-1nm}!}.$$

Die Bezeichnung $(a\,\mathfrak{E}_{n\,m})$ werde für eine beliebige Sequenz verwendet, die durch Aneinandersetzen von a Sequenzen aus der Menge $\mathfrak{E}_{n\,m}$ entsteht, d.h. es sei

$$(5) \qquad (a\,\mathfrak{E}_{n\,m}) = E^1_{n\,m} E^2_{n\,m} \dots E^a_{n\,m} \qquad (E^\alpha_{n\,m} \in \mathfrak{E}_{n\,m};\ \alpha = 1, \dots, a).$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{p}\big((a\,\mathfrak{E}_{n\,m})\big) = \mathfrak{x}_{n\,m}$, unabhängig von der Zahl a und von der Wahl der Sequenzen $E^\alpha_{n\,m}$. In diesem Sinne definieren wir natürliche Zahlen $a_{n\,m}$ $(n = 1, 2, \dots;\ m = 1, \dots, q_n)$ in lexikographischer Reihenfolge derart, daß für alle n und m die Sequenzen $E = (a_{11}\,\mathfrak{E}_{11})\,(a_{12}\,\mathfrak{E}_{12}) \dots (a_{n\,m}\,\mathfrak{E}_{n\,m})$ der Bedingung

$$(6) \qquad \delta\big(\mathfrak{p}(E), \mathfrak{x}_{n\,m}\big) < \frac{\sqrt{g}}{n}$$

genügen und außerdem $a_{n\,m} \geqq n$ ist, also die Sequenzen $(a_{n\,m}\,\mathfrak{E}_{n\,m})$ mindestens die Länge n^2 haben. Die Ungleichung (6) ist durch Wahl eines genügend großen $a_{n\,m}$ stets erfüllbar, da ja, wenn etwa $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n\,m-1}$ bereits definiert sind, jede Folge der Form

$$\varrho_\alpha = 0,\ (a_{11}\,\mathfrak{E}_{11}) \dots (a_{n\,m-1}\,\mathfrak{E}_{n\,m-1})\,(\alpha\,\mathfrak{E}_{n\,m})$$

beim Grenzübergang $\alpha \to \infty$ gegen eine Zahl ϱ konvergiert, für die $\lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{p}_i(\varrho) = \mathfrak{x}_{n\,m}$ ist. Die Menge M soll nun aus allen Zahlen ϱ bestehen, deren Ziffernentwicklung (1) von der Form

$$(7) \quad \varrho = 0, (a_{11}\,\mathfrak{E}_{11}) \dots (a_{1\,q_1}\,\mathfrak{E}_{1\,q_1})\,(a_{21}\,\mathfrak{E}_{21}) \dots (a_{2\,q_2}\,\mathfrak{E}_{2\,q_2}) \dots (a_{n1}\,\mathfrak{E}_{n1}) \dots (a_{n\,q_n}\,\mathfrak{E}_{n\,q_n}) \dots$$

ist.

7. Zum Nachweis von

$$(8) \qquad \dim M \geqq d(\mathfrak{z})$$

brauchen wir folgende Definitionen: Die Sequenzen $E_{n\,m}$, aus denen sich die $(a_{n\,m}\,\mathfrak{E}_{n\,m})$ in (7) zusammensetzen, seien in der Reihenfolge ihres Auftretens durchnumeriert und so mit $F_1, F_2, \dots$ bezeichnet, so daß $\varrho = 0, F_1 F_2 \dots F_p \dots$ wird. Die Länge von F_p sei n_p, und es sei $W(p) = \sum\limits_{\varkappa=1}^{p} n_\varkappa$. Wegen $n_p \to \infty$ ist dann $n_p = o\big(W(p)\big)$. Ist ferner I_p die Menge aller reellen Zahlen ϱ, die in den ersten $W(p)$ Ziffern mit irgendwelchen Elementen von M übereinstimmen, so ist $M = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} I_p$, $I_p \geqq I_{p+1}$ $(p = 1, 2, \dots)$, und I_p besteht offenbar aus einer Anzahl $N(p)$ von Grundintervallen $W(p)$-ter Stufe. Beim Übergang von p auf $p+1$ erkennt man, daß jedes dieser Grundintervalle von I_p die gleiche Anzahl von Grundintervallen von I_{p+1} enthält. Somit wird, wenn etwa $F_{p+1} = E^a_{n\,m}$ ist,

$$\frac{N(p+1)}{N(p)} = \frac{n_{p+1}!}{k_{0\,n\,m}!\,k_{1\,n\,m}! \dots k_{g-1\,n\,m}!},$$

also nach Hilfssatz 3

$$\frac{N(p+1)}{N(p)} = g^{n_{p+1}\,(d\,(\mathfrak{x}_{n\,m}) + o\,(1))}.$$

Folglich gilt, da wegen $\mathfrak{x}_{n\,m} \in V_n$ und $\lim_{n\to\infty} V_n = V$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für genügend großes n sicher $d(\mathfrak{x}_{n\,m}) > d(\mathfrak{z}) - \varepsilon$ ist, für hinreichend großes p

$$\frac{N(p+1)}{N(p)} \geq g^{n_{p+1}(d(\mathfrak{z})-2\varepsilon)}$$

und somit für $p \geq p_0(\varepsilon)$ wegen $N(p) = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{N(i+1)}{N(i)}$ $(N(0)=1)$ offenbar

$$N(p) \geq g^{(n_1+n_2+\cdots+n_p)(d(\mathfrak{z})-3\varepsilon)} = g^{W(p)(d(\mathfrak{z})-3\varepsilon)}.$$

Daher ist das Theorem 5 aus [4] in der in [7] zitierten Form mit $\lambda_p = g^{-W(p)}$ anwendbar. Für $\alpha < d(\mathfrak{z})$ nimmt die dort in der Bedingung b) auftretende Reihe die Form

$$\sum_{p=1}^{\infty} g^{n_p} \frac{1}{N(p)\, g^{-\alpha W(p)}} \leqq \sum_{p=p_0(\varepsilon)}^{\infty} g^{n_p + W(p)(\alpha - d(\mathfrak{z}) + 3\varepsilon)} + C$$

an, wo C eine Konstante ist, und da der Exponent für genügend große p sicher $< W(p)(\alpha - d(\mathfrak{z}) + 4\varepsilon)$ ist, kann man diese Reihe durch die Festsetzung $\varepsilon < \frac{d(\mathfrak{z}) - \alpha}{4}$ konvergent machen. Daraus folgt dim $M \geqq \alpha$ und damit (8).

8. Als nächster Schritt beim Beweis von Satz 2 ist zu zeigen, daß

$$M \subseteqq G(V) \tag{9}$$

gilt. Dazu beweisen wir, daß für jede Zahl $\varrho \in M$ sowohl

$$V(\varrho) \subseteqq V \tag{10}$$

als auch

$$V \subseteqq V(\varrho) \tag{11}$$

ist, was offenbar mit $V(\varrho) = V$ und daher mit (9) gleichbedeutend ist.

a) Zum Beweis von (10) zeigen wir, daß für jedes $\varrho \in M$ und jedes genügend große i, wenn die Ziffer e_i in (1) im Sinne von (7) und (5) in der Sequenz $E^a_{n\,m}$ liegt,

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) < \frac{4\sqrt{g}}{n-1} \tag{12}$$

gilt. Dazu seien j und l die Anzahl der Ziffern von ϱ, die vor der Sequenz $E^a_{n\,m}$, bzw. der Sequenz $(a_{n\,m}\mathfrak{E}_{n\,m})$ liegen, so daß also $l \leqq j \leqq i$ gilt. Dann ist nach Hilfssatz 1, angewendet auf die Sequenzen $E_1 = e_1 e_2 \ldots e_l$ und $E_2 = e_{l+1} \ldots e_j$, offenbar, da ja $\mathfrak{p}(E_2) = \mathfrak{x}_{n\,m}$ ist,

$$\delta(\mathfrak{p}_j(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) \leqq \delta(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}),$$

ferner im Fall $m > 1$ nach (6) und (3)

$$\delta(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m}) \leqq \delta(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n\,m-1}) + \delta(\mathfrak{x}_{n\,m-1}, \mathfrak{x}_{n\,m}) < \frac{\sqrt{g}}{n} + \frac{2\sqrt{g}}{n}.$$

und im Fall $m=1$ nach (6) und (4)

$$\delta(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{nm}) \leqq \delta(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{n-1\,q_{n-1}}) + \delta(\mathfrak{x}_{n-1\,q_{n-1}}, \mathfrak{z}) + \delta(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_{n1})$$
$$< \frac{\sqrt{g}}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n},$$

also in beiden Fällen

$$\delta(\mathfrak{p}_l(\varrho), \mathfrak{x}_{nm}) < \frac{3\sqrt{g}}{n-1}.$$

Weiterhin erhält man durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz 2, da nach der Definition der a_{nm} für genügend große i sicher

$$j \geqq 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 > n^2$$

ist,

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_j(\varrho)) \leqq \frac{\sqrt{g}}{j}(i-j) \leqq \frac{\sqrt{g}}{(n-1)^2}(i-j) \leqq \frac{\sqrt{g}}{n-1}.$$

Somit wird für genügend großes i

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{nm}) \leqq \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{p}_j(\varrho)) + \delta(\mathfrak{p}_j(\varrho), \mathfrak{x}_{nm}) < \frac{\sqrt{g}}{n-1} + \frac{3\sqrt{g}}{n-1} = \frac{4\sqrt{g}}{n-1},$$

wie behauptet.

Folglich ist bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für alle genügend großen i und die zugehörigen Werte von n und m auf Grund der Definition von $\mathfrak{X}_n$

$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), V) \leqq \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{x}_{nm}) + \delta(\mathfrak{x}_{nm}, V) \leqq \frac{4\sqrt{g}}{n-1} + \frac{\sqrt{g}}{n} < \frac{5\sqrt{g}}{n-1} < \varepsilon$$

und somit $\lim_{i\to\infty} \delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), V) = 0$, woraus (10) folgt.

b) Sei $\varrho \in M$ und $\mathfrak{x} = (x_0, \ldots, x_{g-1})$ ein beliebiger Punkt in V. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{x}$ ein Häufungspunkt der Folge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele n derart, daß die $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung von $\mathfrak{x}$ in H einen Punkt $\mathfrak{r}$ von L_n enthält. Dann kommt $\mathfrak{r}$ für jedes solche n in der Folge $\mathfrak{X}_n$ mindestens einmal, in der Folge $\mathfrak{X}$ also unendlich oft vor. Folglich gibt es wegen (6) unendlich viele Punkte der Folge $\{\mathfrak{p}_i(\varrho)\}$ in der $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung von $\mathfrak{r}$, d.h. in der ε-Umgebung von $\mathfrak{x}$. Also ist $\mathfrak{x} \in V(\varrho)$, und daraus folgt (11).

9. Im Hinblick auf (8) und (9) fehlt zum Abschluß des Beweises von Satz 2 noch der Nachweis, daß

(13)
$$\dim G(V) \leqq d(\mathfrak{z})$$

ist. Im Fall $d(\mathfrak{z}) = 1$ ist dies trivial. Sei also $d(\mathfrak{z}) < 1$. Dann betrachten wir die Menge $J_i(\varepsilon)$ aller ϱ mit

(14)
$$\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

Da es für jedes $\varrho \in G(V)$ unendlich viele i gibt, bei denen (14) gilt, ist offenbar $G(V) \leqq \overset{\infty}{\underset{i}{\cup}} J_i(\varepsilon)$ für jedes N. Für alle $\varrho \in J_i(\varepsilon)$ ist trivialerweise

$$z_j - \varepsilon \leqq \frac{A_j(\varrho, i)}{i} \leqq z_j + \varepsilon \qquad (j = 0, \ldots, g-1),$$

und daher gilt für die Anzahl $B_i(\varepsilon)$ der Grundintervalle i-ter Stufe, aus denen sich die Menge $J_i(\varepsilon)$ zusammensetzt, nach Hilfssatz 3 die Beziehung

$$B_i(\varepsilon) \leqq (2\varepsilon i + 1)^g g^{i(d(\mathfrak{z})+\varepsilon_1)} < g^{i(d(\mathfrak{z})+\varepsilon_2)},$$

wobei $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_2 = 0$ ist. Somit wird für $\alpha > d(\mathfrak{z})$

$$\{G(V)\}^\alpha \leqq \lim_{N \to \infty} \sum_{i=N}^{\infty} \frac{g^{i(d(\mathfrak{z})+\varepsilon_2)}}{g^{i\alpha}}.$$

Wählt man ε so klein, daß $\alpha - d(\mathfrak{z}) - 2\varepsilon_2 = \tau > 0$ wird, so folgt

$$\{G(V)\}^\alpha \leqq \lim_{N \to \infty} \sum_{i=N}^{\infty} g^{-i\tau} = \lim_{N \to \infty} \frac{g^{-N\tau}}{1 - g^{-\tau}} = 0,$$

und somit ist $\dim G(V) \leqq \alpha$, woraus sich (13) ergibt.

10. In dem Fall $g = 2$ läßt der Satz 2 folgende Deutung zu: Da die Menge H die Strecke von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ ist, sind die auftretenden Mengen V Teilintervalle dieser Strecke, d.h. von der Form $\overline{P_1 P_2}$ mit $P_1 = (\zeta_1, 1-\zeta_1)$, $P_2 = (\zeta_2, 1-\zeta_2)$, und offenbar ist für die Elemente ϱ von $G(V)$ dann

$$\underline{\lim_{i \to \infty}} \frac{A_0(\varrho, i)}{i} = \zeta_1, \qquad \overline{\lim_{i \to \infty}} \frac{A_0(\varrho, i)}{i} = \zeta_2. \tag{15}$$

Die Funktion $d(\mathfrak{x})$ nimmt in jedem solchen Intervall ihr Minimum an dem Ende an, das am weitesten vom Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entfernt ist. Bezeichnet man also mit $G(\zeta_1, \zeta_2)$ die Menge der dyadischen Zahlen mit (15), so ist auf Grund von Satz 2

$$\dim G(\zeta_1, \zeta_2) = \min\big(d(\zeta_1, 1-\zeta_1),\ d(\zeta_2, 1-\zeta_2)\big) = d(\zeta_\nu, 1-\zeta_\nu),$$

wobei $|\frac{1}{2} - \zeta_\nu| = \max\big(|\frac{1}{2} - \zeta_1|,\ |\frac{1}{2} - \zeta_2|\big)$ ist.

Bezeichnet man ferner mit $S(\zeta_1, \zeta_2)$ die Klasse aller Mengen natürlicher Zahlen mit der unteren asymptotischen Dichte ζ_1 und der oberen asymptotischen Dichte ζ_2, so wird bei der in [6] eingeführten Abbildung $\varrho = \Gamma(\mathfrak{A})$ von Mengen natürlicher Zahlen auf dyadische Brüche offenbar in der dortigen Schreibweise ${}_\Gamma S(\zeta_1, \zeta_2) = G(1-\zeta_2, 1-\zeta_1)$.

11. Ist S eine beliebige Menge mit $S \leqq H$ und $C(S)$ die Menge der ϱ mit $V(\varrho) \leqq S$, so gilt der

Satz 3. $\dim C(S) = \max\limits_{\mathfrak{x} \in S} d(\mathfrak{x})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{z} \in S$ ein Punkt, in dem die Funktion $d(\mathfrak{x})$ ihr Maximum annimmt. Dann gilt für die Menge $G(\{\mathfrak{z}\})$ der einfach-regulären Zahlen ϱ mit $\lim_{i\to\infty} \mathfrak{p}_i(\varrho) = \mathfrak{z}$ offenbar $G(\{\mathfrak{z}\}) \subseteq C(S)$, und andererseits ist nach [3]

$$\dim G(\{\mathfrak{z}\}) = d(\mathfrak{z}).$$

Folglich gilt $\dim C(S) \geq \max_{\mathfrak{x}\in S} d(\mathfrak{x})$.

Zum Beweis der entgegengesetzten Abschätzung betrachte man die Menge U aller Punkte $\mathfrak{x} \in H$ mit $d(\mathfrak{x}) \leq d(\mathfrak{z}) + \varepsilon$. Es gilt sicher $S \subseteq U$ und $C(S) \subseteq C(U)$. Die Anzahl der Grundintervalle n-ter Stufe, in denen Elemente aus $C(U)$ liegen, ist

$$K(n) = \sum_{\mathfrak{x}\in U\cap L_n} \frac{n!}{x_0! \dots x_{g-1}!} \leq n^g \max_{\mathfrak{x}\in U\cap L_n} \frac{n!}{x_0! \dots x_{g-1}!} \leq g^{n(d(\mathfrak{z})+\varepsilon+o(1))},$$

und folglich wird für jedes $\alpha > d(\mathfrak{z})$

$$\{C(S)\}^\alpha \leq \{C(U)\}^\alpha \leq \lim_{n\to\infty} K(n)\, g^{-n\alpha} \leq \lim_{n\to\infty} g^{n(d(\mathfrak{z})+2\varepsilon-\alpha)}.$$

Daraus folgt, da der Exponent für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ negativ wird, $\{C(S)\}^\alpha = 0$ und somit $\dim C(S) \leq d(\mathfrak{z})$, womit Satz 3 bewiesen ist.

12. Seien T und S beliebige Mengen in H mit $T \subseteq S$, und sei $G(T, S)$ die Menge der Zahlen ϱ mit $T \subseteq V(\varrho) \subseteq S$. Dann gilt der

Satz 4. *Sei T^* der Durchschnitt aller Kontinua in H, die T enthalten. Dann ist*

$$\dim G(T, S) = \min_{\mathfrak{x}\in T^*} d(\mathfrak{x}),$$

falls $T^* \subseteq S$ ist; sonst ist $G(S, T)$ leer.

Beweis. Für jedes $\varrho \in G(S, T)$ gilt, da $V(\varrho)$ ein Kontinuum mit $V(\varrho) \supseteq T$ ist, $T^* \subseteq V(\varrho)$, und daraus folgt $G(T, S) \subseteq G(T^*, S)$. Umgekehrt ist wegen $T \subseteq T^*$ trivialerweise $G(T^*, S) \subseteq G(T, S)$, so daß also $G(T, S) = G(T^*, S)$ gilt. Daher gibt es, wenn T nicht in S enthalten ist, keine Zahl ϱ, die gleichzeitig die Bedingungen $V(\varrho) \supseteq T$ und $V(\varrho) \subseteq S$ erfüllt. Ist aber $T^* \subseteq S$, so gilt wegen $G(T^*) \subseteq G(T^*, S)$ auf Grund von Satz 2 sicher

$$\dim G(T, S) = \dim G(T^*, S) \geq \min_{\mathfrak{x}\in T^*} d(\mathfrak{x}).$$

Andererseits ist, wenn das Minimum etwa für $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}$ angenommen wird, für jedes $\varrho \in G(T^*, S)$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ unendlich oft $\delta(\mathfrak{p}_i(\varrho), \mathfrak{z}) < \varepsilon$, und daraus kann man wie beim Beweis von (13) die Ungleichung

$$\dim G(S, T) \leq d(\mathfrak{z})$$

herleiten. Damit ist alles bewiesen.

Folgerung. *Sei $D(T)$ die Menge der ϱ mit $V(\varrho) \supseteq T$. Dann ist*

$$\dim D(T) = \min_{\mathfrak{x}\in T^*} d(\mathfrak{x}).$$

Literatur

[1] Besicovitch, A. S.: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic number system. Math. Ann. **110**, 321—330 (1934). — [2] Borel, E.: Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo **27**, 247—271 (1909). — [3] Eggleston, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. **20**, 31—36 (1949). — [4] Eggleston, H. G.: Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. **54**, 42—93 (1951). — [5] Knichal, V.: Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Maß. Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême, Cl. des Sciences, **1933**, Nr. 14, 1—18. — [6] Volkmann, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine u. angew. Math. **190**, 199—230 (1952). — [7] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. Math. Z. **58**, 284—287 (1953). — [8] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. II. Math. Z. **59**, 247—254 (1953). — [9] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. V. Math. Z. **65**, 389—413 (1956).

University of California, Los Angeles
und Mathematisches Institut der Universität Mainz

(Eingegangen am 8. Juli 1957)

VRIES, H. DE, and A. B. DE MIRANDA
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 450—464 (1958)

Groups with a small number of automorphisms

By
H. DE VRIES and A. B. DE MIRANDA

§ 1. Introduction

In this article we shall investigate the nature of the groups of which the automorphism group has maximal 8 elements. Also a few additional results are obtained. The investigations will be carried out in three sections, § 2 dealing with torsion-free abelian groups, § 3 with mixed abelian groups, § 4 with non-abelian groups.

We shall use the following notations. The automorphism group of a group G will be denoted by $A(G)$. Abelian groups will be written additively, automorphism groups excepted. If G and H are groups, then $G \times H$ (or sometimes $G + H$ if G and H are abelian) will denote the direct product of G and H (or direct sum respectively). Cyclic groups of order n will be denoted by C_n. $\mathfrak{S}_3$ is the full permutation group of three objects, D the dihedral group of order 8, and Q the quaternion group. Elements of automorphism groups will be denoted by Greek letters. $|G|$ will stand for the order of the group G. For further notations and notions we refer to KUROSH [3].

Most of our results can be read from the summarizing scheme. The periodic abelian groups, corresponding to a prescribed automorphism group are listed without any reference. If torsion-free abelian groups occur, which have a certain group as its automorphism group, we only consider those groups of which the rank is at most $\aleph$[1]); our investigation of the automorphism groups of these groups was commenced after the appearance of [2], in which it had been proved, although not explicitly stated, that there exist torsion-free abelian groups of arbitrary rank r with $r \leq \aleph$ of which the automorphism group has order 2. In some cases more general or detailed results are derived than those stated in the scheme. E.g. it is proved in theorem 4 that the cyclic groups C_{8n} ($n = 1, 2, \ldots$) cannot occur as automorphism group of torsion-free abelian groups (nor of mixed abelian groups, as can be argued by using lemma 1).

As to theorem 6, we may remark that also B. H. NEUMANN proved independently that the order of the automorphism group of a non-abelian group is at least 6. This follows from the results of SCHENKMAN [5] too. MILLER [4] proved already that the only *finite* non-abelian group with automorphism group isomorphic to $\mathfrak{S}_3$ is $\mathfrak{S}_3$ itself.

[1]) For indecomposable torsion-free abelian groups of rank $2^{\aleph}$ (which can be constructed such, that their automorphism groups are isomorphic to C_2) cf. ANDRZEJ HULANICKI: Note on a paper of DE GROOT, to be published in Indag. Math.

Table 1. *Scheme of the occurrence of groups G with prescribed automorphism groups $A(G)$*

$A(G)$ \ G	abelian				non-abelian	
	periodic	torsion-free		mixed	finite	infinite
		dec.	indec.			
C_2	C_1, C_2	−	−	−	−	−
C_3	C_3, C_4, C_6	−	$1 \leq r \leq \aleph$	−	−	−
C_3	−	−	−	−	−	−
$C_2 \times C_2$	C_8, C_{12}	$2 \leq r \leq \aleph$	$2 \leq r \leq \aleph$	+	−	−
C_4	C_5, C_{10}	−	$2n-1 \neq r \leq \aleph$	−	−	−
C_5	−	−	−	−	−	−
C_6	C_7, C_9, C_{14}, C_{18}	−	+	−	−	−
$\mathfrak{S}_3$	$C_2 + C_2$	−	−	−	$\mathfrak{S}_3$	−
C_7	−	−	−	−	−	−
$C_2 \times C_2 \times C_2$	C_{24}	$3 \leq r \leq \aleph$	$3 \leq r \leq \aleph$	+	−	+
$C_2 \times C_4$	$C_{15}, C_{16}, C_{20}, C_{30}$	$3 \leq r \leq \aleph$	$3 \leq r \leq \aleph$	−	−	−
C_8	−	−	−	−	−	−
D	$C_2 + C_4$	−	−	−	D	−
Q	−	−	+	−	−	−

Explication: The prescribed automorphism groups are listed in the first column. In the row of a prescribed automorphism group we find for each kind of group either all groups that occur, or, in the torsion-free case, all possible ranks $\leq \aleph$ of the occurring groups, or simply the occurrence or non occurrence, denoted by plus and minus signs. E.g. $C_2 \times C_2$ occurs as automorphism group of C_8, C_{12}, certain decomposable (dec.) and indecomposable (indec.) torsion-free abelian groups for all ranks r with $2 \leq r \leq \aleph$, and of certain mixed abelian groups; Q occurs only as automorphism group of certain indecomposable torsion-free abelian groups.

In a letter known to us B. H. NEUMANN mentioned to have constructed, as we have done too, an (infinite) non-abelian group with an automorphism group isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2$. He also foresaw the validity of theorem 7.

The work related with this article was done under the direction of Prof. J. DE GROOT.

§ 2. Torsion-free abelian groups

If G is a torsion-free abelian group of rank 1, then $|A(G)|$ is infinite or $A(G) \cong C_2$ according to whether or not there occur infinities in a characteristic of the type of G, since, if in the n-th place of this characteristic there occurs ∞, then $g \to p_n^k g$ $(g \in G)$ is an automorphism of G for all integers k, and if no infinities occur in the characteristics of the elements of G, then the characteristics of any two distinct elements $g_1, g_2 \in G$ with $g_1 \neq -g_2$ are different, and since the characteristics are invariant under isomorphisms, the automorphism μ: $g \to -g$ $(g \in G)$ is the only automorphism of G different from the identical automorphism ε: $g \to g$ $(g \in G)$. In searching for groups with automorphism groups of finite order > 2 we, therefore, need not consider groups of rank 1. As mentioned before, there exist groups G of arbitrary rank $\leq \aleph$ such that $A(G) \cong C_2$. Such groups G are necessarily indecomposable, since the automorphism group of a decomposable group contains isomorphically the direct product of the automorphism groups of the direct summands of a direct decomposition of G.

If G is a torsion-free abelian group and $\{a_\alpha\}_\alpha$ is a maximal system of linearly independent elements of G, then G can be regarded as a subgroup of a minimal complete group with the same maximal system of linearly independent elements. If the potency of $\{a_\alpha\}_\alpha$ is at most $\aleph$, then $\{a_\alpha\}_\alpha$ can be assumed to be a set of (linearly independent) real numbers, and the complete group containing G can be assumed to be a complete additive group of real numbers. Any automorphism of G can be extended to an automorphism of the containing complete group. Such an extended automorphism can in an obvious way be represented by a matrix from which we read the images of the a_α as rational linear combinations of the a_α.

Now we shall prove

Theorem 1. *There exist decomposable and indecomposable torsion-free abelian groups of all ranks r with $2 \leq r \leq \aleph$, of which the automorphism group is isomorphic to $C_2 \times C_2$.*

Proof. If we want a decomposable group $G = G_1 + G_2$ of rank r with $2 \leq r \leq \aleph$, we take G_1 and G_2 with the following properties: (i) the sum of the ranks of G_1 and G_2 is r, (ii) $A(G_1) \cong A(G_2) \cong C_2$, (iii) if $g_1 \in G_1$ and $g_2 \in G_2$, then the product of the types of g_1 and g_2 is the null-type, (iv) both G_1 and G_2 possess a maximal linearly independent system of which all elements have not the null-type. This can be done as trivially follows from the methods of construction used in [2]. Now by an automorphism of G the groups G_1 and G_2 are mapped into themselves since e.g. an element of the particular maximal linearly independent system of G_1 can, by (iii) and (iv), only be mapped on an element of G_1. From this we deduce

$$A(G) \cong A(G_1) \times A(G_2) \cong C_2 \times C_2.$$

We get an indecomposable group with the same rank and the same automorphism group if we choose G_1 and G_2 as subgroups of the additive group of real numbers with only the null-element in common, and adjoin $\frac{g_1 + g_2}{2}$ as generating element if g_1 and g_2 are particular elements not divisible by 2 of G_1 and G_2 respectively.

This trick of constructing indecomposable groups was first applied by BOGNÁR [1]. That in our case the trick works can be shown, e.g. by considering the automorphism group. The indecomposability of the constructed group H can also be proved as follows: Let $H = H_1 + H_2$ be a decomposition. By (iii) and (iv) the components of any element of the chosen maximal linearly independent system of G_1 in this decomposition are contained in G_1. From this we get that G_1 is the direct sum of its projections into H_1 and H_2; but by (ii) we derive $G_1 < H_1$ (or $G_1 < H_2$). The same applies to G_2. Then, necessarily $G_1 = H_1$ and $G_2 = H_2$ (or $G_1 = H_2$ and $G_2 = H_1$). But G_1 and G_2 do not generate H, since $\frac{g_1 + g_2}{2}$ is not contained in $G_1 + G_2$. So we have a contradiction.

Theorem 2. *If G is a torsion-free abelian group, and $A(G) \cong C_4$, then G is indecomposable and the rank of G is non-odd, and all non-odd ranks $\leq \aleph$ occur.*

Proof. Assume $A(G) \cong C_4$. Then G is indecomposable, since the automorphism group of a decomposable torsion-free abelian group contains at least three elements of order 2, and $A(G)$ does not. Let μ be the automorphism of G, which maps each element of G on its inverse element. If φ is a generating element of $A(G)$, then $\varphi^2 = \mu$. From this we infer that φg is linearly independent from g for all $g \in G$, $g \neq 0$. If $\varphi a_1 = a_2$, and $a_3 \in G$, a_3 being linearly independent from a_1, a_2, then φa_3 is linearly independent from a_1, a_2, a_3: suppose the contrary: $\varphi a_3 = r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3$ (r_i being rational), then $\varphi^2 a_3 = r_1 a_2 - r_2 a_1 + r_3 r_1 a_1 + r_3 r_2 a_2 + r_3^2 a_3$, but $\varphi^2 a_3 = -a_3$, so we would have $r_3^2 = -1$. Using and extending this argument it is easily seen that the rank of G is even if it is finite, by constructing a maximal linearly independent system of non-odd potency.

Now we construct a group G, such that $A(G) \cong C_4$, and the rank of G is 2.

Let a_1, a_2 be linearly independent real numbers, and p_{i_k} ($k = 1, 2, \ldots$) an infinite sequence of different prime numbers, $p_{i_k} \neq 2$, such that $p_{i_k} = s_k^2 + t_k^2$, s_k and t_k being positive integers. Then we define G by

$$G = \left\{a_1, a_2, \frac{s_k a_1 + t_k a_2}{p_{i_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

In order to prove that $A(G) \cong C_4$ we need the following easily verifiable properties of G: If x and y are integers such that $x a_1 + y a_2$ is divisible by p_{i_k} for some definite k, then $x a_1 + y a_2$ is a linear combination with integers as coefficients of $p_{i_k} a_1$, $p_{i_k} a_2$ and $s_k a_1 + t_k a_2$, and:

1°. $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}$,

2°. $-y a_1 + x a_2$ is divisible by p_{i_k},

3°. $x t_k \equiv y s_k \pmod{p_{i_k}}$,

4°. in the generating system of G we may replace

$$\frac{s_k a_1 + t_k a_2}{p_{i_k}} \text{ by } \frac{-t_k a_1 + s_k a_2}{p_{i_k}}.$$

From these properties it follows that the mapping φ induced by $a_1 \to a_2$, $a_2 \to -a_1$ is an automorphism of order 4 of G. Let ψ, represented by

$$\psi a_1 = m_1 a_1 + m_2 a_2$$
$$\psi a_2 = n_1 a_1 + n_2 a_2,$$

be an arbitrary automorphism of G. Regarding the nature of G, we may write

$$m_1 = \frac{m_1'}{N}, \qquad m_2 = \frac{m_2'}{N},$$
$$n_1 = \frac{n_1'}{N}, \qquad n_2 = \frac{n_2'}{N},$$

m_i', n_i' and N being integers, N square-free, positive and minimal. Since the same can be said of any power of ψ, we easily deduce that the determinant of the transformation matrix equals 1 or -1. For any k, we have that

$$N\psi(s_k a_1 + t_k a_2) = (s_k m_1' + t_k n_1')\, a_1 + (s_k m_2' + t_k n_2')\, a_2$$

is divisible by p_{i_k}, thus, using property 1°:

$$(s_k m_1' + t_k n_1')^2 + (s_k m_2' + t_k n_2')^2 \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}.$$

Using $s_k^2 + t_k^2 = p_{i_k}$, we infer:

$$s_k\left(m_1'^2 + m_2'^2 - n_1'^2 - n_2'^2\right) + 2t_k(m_1' n_1' + m_2' n_2') \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}$$
$$-t_k\left(m_1'^2 + m_2'^2 - n_1'^2 - n_2'^2\right) + 2s_k(m_1' n_1' + m_2' n_2') \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}.$$

If p_{i_k} is sufficiently large, then the congruence symbols may be replaced by equality symbols, and we infer:

$$m_1'^2 + m_2'^2 = n_1'^2 + n_2'^2, \qquad m_1' n_1' + m_2' n_2' = 0;$$

and consequently we can define:

$$\text{(i)} \quad m' = m_1' = n_2', \qquad n' = m_2' = -n_1',$$

or

$$\text{(ii)} \quad m' = m_1' = -n_2', \qquad n' = m_2' = n_1'.$$

The second possibility cannot occur: then, using property 3°, we would have, since $(s_k m_1' + t_k n_1')\, a_1 + (s_k m_2' + t_k n_2')\, a_2$ is divisible by p_{i_k}:

$$(s_k m' + t_k n')\, t_k \equiv (s_k n' - t_k m')\, s_k \pmod{p_{i_k}},$$

from which we deduce:

$$-s_k m' \equiv t_k n' \pmod{p_{i_k}}$$
$$t_k m' \equiv s_k n' \pmod{p_{i_k}},$$

this would give, for sufficiently large p_{i_k}: $m' = n' = 0$.

In case (i) we get the following: if p_{i_k} is a divisor of N, then

$$N\psi(s_k a_1 + t_k a_2) = (s_k m' - t_k n')\, a_1 + (s_k n' + t_k m')\, a_2$$

is twice divisible by p_{i_k}. But then we have e.g.:

$$s_k m' - t_k n' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}.$$

Since $-n' a_1 + m' a_2$ is divisible by p_{i_k} too, we have also:

$$s_k m' + t_k n' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}},$$

and thus

$$m' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}}, \qquad n' \equiv 0 \pmod{p_{i_k}};$$

this contradicts the construction of N. So we may conclude that no p_{i_k} divides N, and $N = 1$. But then the fact that the determinant of the trans-

formation matrix equals 1 or -1 is expressed by the equation $m'^2+n'^2=1$, which admits only four solutions, each of them representing a power of φ; this implies $A(G)\cong C_4$.

A group G of arbitrary non-odd rank $r\leqq\aleph$, such that $A(G)\cong C_4$, can be obtained by the following rather complicated construction. Take r linearly independent real numbers and divide them into pairs (a_α, b_α). To each pair (a_α, b_α) we construct a group as above, replacing a_1 by a_α, a_2 by b_α. Now we adjoin generating elements as far as necessary so as to obtain the following: (i) for any fixed α, a_α and b_α will have the same characteristic with zeros in the 2nd and the i_k-th places; (ii) for any pair (α,β) with $\alpha\neq\beta$ a_α and a_β will have incomparable types and characteristics which have only 0 and 1 as values; (iii) for one fixed index ν $a_\alpha+a_\nu$ and $b_\alpha+b_\nu$ are divisible by 3 for all indices $\alpha\neq\nu$.

Theorem 3. *There exist decomposable and indecomposable torsion-free abelian groups of all ranks r with $3\leqq r\leqq\aleph$ of which the automorphism group is isomorphic to $C_2\times C_2\times C_2$ or to $C_2\times C_4$. The rank of a group with such an automorphism group cannot be* 2.

Proof. For the proof of the first part the same procedure can be followed as in the proof of theorem 1. For a decomposable group $G=G_1+G_2$ with $A(G)\cong C_2\times C_4$, we need only take G_1 and G_2 such that $A(G_1)\cong C_2$ and $A(G_2)\cong C_4$, and the conditions (i), (iii) and (iv) of the proof of theorem 1 are satisfied. To make G indecomposable with the same automorphism group we adjoin $\frac{g_1+g_2-g_2'}{2}$, where $g_1\in G_1$, $g_2, g_2'\in G_2$ are chosen in such a way that g_2 is mapped on g_2' by a generating element of $A(G_2)$ and both g_1 and g_2-g_2' are not divisible by 2 (the last condition means another restriction for the choice of G_2). For $A(G)$ to be isomorphic to $C_2\times C_2\times C_2$, the condition "$A(G_2)\cong C_4$" has to be replaced by "$A(G_2)\cong C_2\times C_2$ and G_2 indecomposable", and g_2 has to be chosen such that by any automorphism of G_2 g_2 is mapped on g_2 or $-g_2$, and g_2' must be omitted.

For the remaining part of our theorem we proceed as follows. Suppose G of rank 2, $A(G)\cong C_2\times C_2\times C_2$. We choose a maximal linearly independent system $\{a_1, a_2\}$, such that a_1 and a_2 are interchanged by some automorphism of G. The possibility of this follows by some simple arguments. The matrix associated with this automorphism is $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. If $\begin{pmatrix}m_1&m_2\\n_1&n_2\end{pmatrix}$ is the matrix of any other automorphism, then the conditions that $A(G)$ is commutative and the latter automorphism is of order 2 lead to $m_1=n_2$, $m_2=n_1$ and $m_1^2+m_2^2=1$, $2m_1m_2=0$. These equations admit only four solutions, but $A(G)$ would be of order 8; so we have a contradiction. If $A(G)$ is supposed to be isomorphic to $C_2\times C_4$, then the a_i can be chosen such that the matrix of a certain automorphism of order 4 is $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. If $\begin{pmatrix}m_1&m_2\\n_1&n_2\end{pmatrix}$ is the matrix of any automorphism of order 2, we are lead as above to the equations $m_1=n_2$, $m_2=-n_1$, and $m_1^2-m_2^2=1$, $2m_1m_2=0$ which admit only two solutions, whereas $C_2\times C_4$ contains three automorphisms of order 2.

Now we give an example of a *torsion-free abelian group G (of rank 4) with $A(G)\cong C_2\times C_3$; this group is necessarily indecomposable.*

Example. Let a_i, b_i $(i=1, 2)$ be linearly independent real numbers. Then

$$G=\left\{\frac{a_1}{2^n}, \frac{a_2}{2^n}, \frac{b_1}{3^n}, \frac{b_2}{3^n}, \frac{a_1+b_1}{5^n}, \frac{a_2+b_2}{5^n}, \frac{a_1+b_2}{7^n}, \frac{a_2-b_1+b_2}{7^n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

If φ is an automorphism of G, then

$$\varphi a_1=m_1a_1+m_2a_2 \qquad \varphi b_1=n_1b_1+n_2b_2$$
$$\varphi a_2=m_1'a_1+m_2'a_2 \qquad \varphi b_2=n_1'b_1+n_2'b_2.$$

From the fact that $\varphi(a_1+b_1)$, $\varphi(a_2+b_2)$, and $\varphi(a_1+b_2)$, $\varphi(a_2-b_1+b_2)$, are linear combinations (with rational coefficients) of a_1+b_1, a_2+b_2, and a_1+b_2, $a_2-b_1+b_2$, respectively, it can be found that the matrix transforming the vector (a_1, a_2, b_1, b_2) is of the form

$$\begin{pmatrix} k & l & 0 & 0 \\ -l & k+l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & l \\ 0 & 0 & -l & k+l \end{pmatrix}.$$

It is easily seen that k and l are necessarily integers, and consequently

$$\begin{vmatrix} k & l \\ -l & k+l \end{vmatrix} = \pm 1.$$

This equation has 6 solutions of which $k=0$, $l=1$ entails a generating automorphism of order 6 of G.

The following example will provide for a *torsion-free abelian group G (of rank 8) with $A(G)\cong Q$.*

Example. Let a_i, b_i $(i=1, 2, 3, 4)$ be linearly independent real numbers. The generating elements of G are:

$$\frac{a_i}{2^n}, \frac{b_i}{3^n}, \frac{a_i+b_i}{5^n}, \frac{a_1+b_2}{7^n}, \frac{a_2-b_1}{7^n}, \frac{a_3-b_4}{7^n}, \frac{a_4+b_3}{7^n}, \frac{a_1+b_3}{11^n},$$
$$\frac{a_2+b_4}{11^n}, \frac{a_3-b_1}{11^n}, \frac{a_4-b_2}{11^n}, \frac{a_1+b_4}{13^n}, \frac{a_2-b_3}{13^n}, \frac{a_3+b_2}{13^n}, \frac{a_4-b_1}{13^n},$$

for all integers n.

Then, by some computing, it may be found that by any automorphism of G the vectors (a_1, a_2, a_3, a_4) and (b_1, b_2, b_3, b_4) are transformed into linear combinations of their elements by the same matrix of the form:

$$\begin{pmatrix} m & -s & -n & -t \\ s & m & -t & n \\ n & t & m & -s \\ t & -n & s & m \end{pmatrix},$$

m, n, t, s being integers, and the matrix being unimodular. So we get: $m^2+n^2+s^2+t^2=1$. Each of the 8 solutions of this equation does give rise to an automorphism of G. Of these automorphisms 6 have order 4, which implies $A(G)\cong Q$.

We shall now prove:

Theorem 4. *The automorphism group of a torsion-free abelian group cannot be isomorphic to* $\mathfrak{S}_3$, D *or* C_{8n}, n *being an arbitrary positive integer.*

Proof. Let G be a torsion-free abelian group. Then the centre of $A(G)$ contains the automorphism $\mu: \mu g = -g$ (all $g \in G$). The centre of $\mathfrak{S}_3$, however, is trivial, so $A(G)$ cannot be isomorphic to $\mathfrak{S}_3$.

Now suppose $A(G)\cong D$. Then $A(G)$ is generated by an automorphism φ of order 4 and an automorphism δ of order 2 with the relation $\varphi^3\delta=\delta\varphi$. Since φ^2 is the only non-trivial element of the centre of D, we have $\varphi^2=\mu$. If $\delta g=g'$, then $\delta(g+g')=g+g'$ and $\delta(g-g')=-(g-g')$. Using this we can find a maximal system of linearly independent elements which is the union of disjoint non-empty sets $A=\{a_\alpha\}$, $B=\{b_\beta\}$, such that $\delta a_\alpha=a_\alpha$, $\delta b_\beta=-b_\beta$. (Observe that if g is linearly independent from some linearly independent system, then either $g+g'$ or $g-g'$ is linearly independent from it too.) Let P and R be the minimal serving subgroups containing A respectively B. If $p\in P$, $q\in R$, then $\delta(p+q)=p-q$, from which we deduce that the divisors of $p+q$ (in G) divide also p and q, 2 perhaps excepted. P and R cannot be mapped by φ into themselves, since in this case $\varphi\delta=\delta\varphi$. If $\varphi P\neq R$, then the mapping δ^* defined by $\delta^*g=-g$ if $g\in\varphi P$, $\delta^*g=g$ if $g\in\varphi R$, can be linearly extended to an automorphism different from the elements of the supposed $A(G)$. Equally, $\varphi R\neq P$ is not possible. So we have necessarily $\varphi P=R$, $\varphi R=P$. Then we choose the b_β such that $\varphi a_\alpha=b_\alpha$. Then, however, the mapping $\psi: \psi a_\alpha=b_\alpha$, $\psi b_\alpha=a_\alpha$ induces a new automorphism different from all other ones. And we have proved the required contradiction.

At last we shall prove that $A(G)$ cannot be isomorphic to a cyclic group of the form C_{8n}.

Assume $A(G)$ contains an element φ of order $8n$ such that $\varphi^{4n}=\mu$ [if $A(G)\cong C_{8n}$, this is evidently the case]. We consider the mapping

$$\psi: \psi g=\sum_{i=1}^{4n-1}\varphi^i g.$$

ψ is clearly a homomorphic mapping of G into itself, and also an isomorphism, since $\psi g=0$ would imply

$$\sum_{i=2}^{4n}\varphi^i g=0, \quad \text{or} \quad \sum_{i=2}^{4n-1}\varphi^i g-g=0,$$

and $\varphi g+g=0$, but this cannot occur because of $\varphi^{4n}g=-g$. ψ is also an automorphism of G since each element g of G occurs as an image under ψ:

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{4n-1}(-1)^k\varphi^k g\right)=g.$$

Now it suffices to show that ψ is different from any power of φ. It can easily be shown that ψ cannot be φ^k for $k=0, 1, 4n-1, 4n, 4n+1, 8n-1$. For $k=4n+1$ (the most difficult case) this runs as follows: we would have

$$\sum_{i=1}^{4n-1} \varphi^i g = \varphi^{4n+1} g = -\varphi g, \quad \text{and} \quad \sum_{i=2}^{4n-1} \varphi^i g = -\varphi^2 g + g$$

(by applying φ).

Subtracting these equations we get: $\varphi^2 g = g - 2\varphi g$. If g is chosen such that g and φg are linearly independent, then the last equation leads to a contradiction, since by $4n-2$ times applying φ we get that $-g$ would be a proper linear combination of g and φg.

The remaining possibilities for $k \neq 0, 1, 4n-1, 4n, 4n+1, 8n-1$ are contained in:

$$\psi g = \pm \varphi^k g \qquad (1 < k < 4n-1).$$

Then we have

$$\sum_{i=1}^{4n-1} \varphi^i g = \pm \varphi^k g, \quad \sum_{i=2}^{4n-1} \varphi^i g = \pm \varphi^{k+1} g + g,$$

which implies

$$g + \varphi g \mp \varphi^k g \pm \varphi^{k-1} g = 0.$$

Applying φ^i $(i=0, 1, \ldots, 4n-1)$ we get a set of homogeneous equations with the following $4n \times 4n$ coefficient matrix: the elements of the first row are $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{1,k+1} = -a_{1,k+2} = \mp 1$, $a_{1l} = 0$ $(l \neq 1, 2, k+1, k+2)$, the other elements are obtained by the rules $a_{i+1,j-1} = a_{ij}$ $(i \leqq 4n-1,\ j \leqq 4n-1)$, $a_{i+1,1} = -a_{i,4n}$.

Now we shall prove that the determinant of this matrix is always unequal to zero (this implies that the above mentioned set of equations can only be satisfied for $g=0$, which gives the required contradiction).

We apply a trick indicated to us by Prof. N. G. DE BRUIJN. Choose a complex number ξ with $\xi^{4n} = -1$. After multiplying the elements of the i-th column by ξ^{4n-i} and the elements of the j-th row by ξ^j, we get a circulant matrix. The determinant of this matrix is the product of the factors

$$-1 - \vartheta\xi \pm \vartheta^k \xi^k \mp \vartheta^{k+1} \xi^{k+1}$$

where ϑ runs through the set of $4n$-th unit roots. These factors are unequal to zero, and thus the determinant of our coefficient matrix is unequal to zero.

§ 3. Mixed abelian groups

For our purpose it is necessary to examine the automorphism group of $C_{p^n} + H$, p being a prime number, n a positive integer, and H any (infinite) torsion-free abelian group.

Any automorphism of $C_{p^n} + H$ leaves C_{p^n} invariant and consequently induces an automorphism of $(C_{p^n} + H)/C_{p^n}$, and, by the natural isomorphism

between $(C_{p^n}+H)/C_{p^n}$ and H, an automorphism of H. This mapping of $A(C_{p^n}+H)$ onto $A(H)$ is a homomorphic mapping. Let Σ be the kernel of this homomorphism. A homomorphic mapping of Σ onto $A(C_{p^n})$, with kernel Σ', is defined by mapping any element of Σ onto its restriction to the periodic part of $C_{p^n}+H$, this restriction being transformed into an automorphism of C_{p^n} under some fixed isomorphism between the periodic part of $C_{p^n}+H$ and C_{p^n}. Then we have:

$$A(C_{p^n}+H)/\Sigma \cong A(H), \quad \Sigma/\Sigma' \cong A(C_{p^n}).$$

Further, regarding C_{p^n} and H as subgroups of $C_{p^n}+H$, the elements of Σ' are those automorphisms of $C_{p^n}+H$, under which the elements of C_{p^n} are invariant and an element $h \in H$ is mapped on an element $h+c$, $c \in C_{p^n}$.

If we denote by P the subgroup of H consisting of all elements divisible by p, then all elements of H/P are of order p, and we state the following

Lemma 1. *If $|H/P|$ is infinite, then $|\Sigma'|$ is infinite; if H/P is of order p^r ($r \geqq 0$), then Σ' is of order p^{nr} and Σ' is the direct product of r cyclic groups of order p^n.*

Proof. We remark that Σ' is abelian. Each automorphism of Σ' has an order which is a power of p not greater than the n-th: if $\sigma \in \Sigma'$, and $h \in H$, then $\sigma h = h + c$, $c \in C_{p^n}$, and $\sigma^{p^n} h = h + p^n c = h$.

Now we shall first prove that there are infinitely many elements of Σ' of order p if $|H/P|$ is infinite, and $p^r - 1$ ones if $|H/P| = p^r$.

Let c be a generating element of C_{p^n}, and $d = p^{n-1} c$. Let σ be an element of Σ' of order p. σ is completely determined by its action on the elements of H. If $h \in H$, then $\sigma h = h + nd$ $(0 \leqq n < p)$. If $h \in P$, then $h = pg$ for some $g \in H$, and $\sigma h = \sigma pg = p\sigma g = p(g + nd) = pg = h$ for some n. So all elements of P are invariant under σ. Consequently, if $H = P$, then $\Sigma' = \{\varepsilon\}$, and the lemma is proved. We assume further $H \neq P$ (and $\sigma \neq \varepsilon$). Let H be divided into the cosets to P (the coset to which a belongs, will be denoted by $\bar{a}$). If $a, a' \in \bar{a}$, and $\sigma a = a + nd$, $\sigma a' = a' + md$ $(0 \leqq n < p, 0 \leqq m < p)$, then $\sigma(a - a') = a - a' + (n - m)d$. But $a - a' \in P$, so $n = m$. Further, if $\bar{a}$ and $\bar{b}$ are two cosets to P, and $\sigma a = a + nd$, $\sigma b = b + nd$, then the elements of the coset $\overline{a - b}$ are invariant under σ. From this we derive that the cosets of which the elements are invariant under σ form a subgroup C of index p of H/P. Conversely, if we have any such subgroup C, and $A = \{\bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ is a generating element of $(H/P)/C$, then we get an automorphism σ as considered by putting $\sigma a = a + kd$ ($k = 1, 2, \ldots$ or $p - 1$) for all a which are elements of cosets of A, and extending σ over H in the natural way; and in this way we get all of them once. So the number of elements of Σ' of order p amounts to the number of subgroups of index p of H/P, multiplied by $p - 1$. This amounts to $p^r - 1$ if $|H/P| = p^r$, and infinity if $|H/P|$ is infinite; this was to be proved.

Now we proceed with the case $|H/P| = p^r$. For completing the proof it suffices to show that for any $\sigma \in \Sigma'$ of order p^l $(0 < l < n)$ there exists a $\tau \in \Sigma'$ such that $\tau^p = \sigma$.

Let $\sigma g = g + x_g c$, $g \in H$, x_g being an integer divisible by p. We get an automorphism τ of $C_{p^n} + P$ by putting $\tau(pg) = pg + x_g c$ (all elements of C_{p^n} remaining invariant). For extending τ to an automorphism of $C_{p^n} + H$, we write

$$H/P = \{\bar{a}_1\} + \{\bar{a}_2\} + \cdots + \{\bar{a}_r\}.$$

Then we put

$$\tau(k a_i') = k a_i' + \frac{1}{p} k x_{a_i'} c,$$

whenever $a_i' \in \bar{a}_i$. Extending τ as far as necessary, we get an automorphism as required (observe that $k x_g \equiv x_{kg} \pmod{p^n}$ for $g \in H$). So our lemma is proved.

We now shall prove

Theorem 5. *If G is a mixed abelian group, and $|A(G)| \leqq 8$, then either $A(G) \cong C_2 \times C_2$ or $A(G) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$, and the periodic part of G is in both cases isomorphic to C_2.*

Proof. Using the remarks and notations mentioned above we have the relation

$$|A(C_{p^n} + H)| = |A(H)|\,|A(C_{p^n})|\,|\Sigma'|. \tag{1}$$

If $|\Sigma'| = 1$, then $|H/P| = 1$ by our lemma, and all elements of H are divisible by p. Then H has infinitely many automorphisms and so has $C_{p^n} + H$. Using of the lemma the statement about the order of Σ', and relation (1), it follows by simple reasoning that $G \cong C_{p^n} + H$, $p = 2$, $n = 1$. Thus we have:

$$\Sigma = \Sigma' \cong H/P, \qquad A(C_2 + H)/\Sigma' \cong A(H).$$

Then either $|\Sigma'| = 2$, or $|\Sigma'| = 4$ and $|A(H)| = 2$. In either case the elements of the naturally in $A(C_2 + H)$ embedded $A(H)$ commute with the elements of Σ'. And we get

$$A(C_2 + H) \cong \Sigma' \times A(H).$$

Now we still have the following possibilities:

(i) $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_2$,
(ii) $\Sigma' \cong C_2 \times C_2$, $A(H) \cong C_2$,
(iii) $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_2 \times C_2$,
(iv) $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_4$.

We shall prove that (iv) cannot occur (which proves the theorem), and give general examples of (i), (ii) and (iii).

Suppose $\Sigma' \cong C_2$, $A(H) \cong C_4$. Let φ be a generating element of $A(H)$. H is divided into the non-empty sets P and $H \setminus P$. Take $a_1 \in H \setminus P$. Then $\varphi a_1 = a_2 \in H \setminus P$. The sum of any two elements of $H \setminus P$ lies in P. So $a_1 + a_2 \in P$, or $\frac{a_1 + a_2}{2} \in H$. If $\frac{a_1 + a_2}{4} \in H$, then by $\varphi \frac{-a_1 + a_2}{4} \in H$, and thus $\frac{a_1 + a_2}{4} + \frac{-a_1 + a_2}{4} = \frac{a_2}{2} \in H$, in contradiction with $a_2 \in H \setminus P$. If $\frac{a_1 + a_2}{4} \notin H$, then

$\frac{a_1+a_2}{2} \in H \setminus P$, and we get $-a_1+\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{-a_1+a_2}{2} \in P$. So $\frac{-a_1+a_2}{4} \in H$. Applying φ we get, then, $\frac{-a_1-a_2}{4} \in H$, in contradiction with $\frac{a_1+a_2}{4} \notin H$. In either case we derive a contradiction, so $A(H) \neq C_4$.

For an example of (i) we take a group H with $A(H) \cong C_2$ and such, that there exists a maximal linearly independent system of H with the property that all elements but one are infinitely often divisible by 2. This can be done for all ranks r with $1 \leq r \leq \aleph$ as follows from the construction method of [2]. Then $\Sigma' \cong H/P \cong C_2$.

For an example of (ii) we take the group H' to be the group H of the first example with the further restriction that no element of H' is infinitely often divisible by 3, 5 or 7, and the elements of its maximal linearly independent system are divisible by infinitely many real numbers unequal to 2. Then we get H as follows:

$$H = \left\{H', \frac{a_1}{3^n}, \frac{a_2}{5^n}, \frac{a_1+a_2}{7^n}, \frac{a_1+a}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

in which a is an element of the maximal linearly independent system of H' not divisible by 2 and a_1, a_2 are two more linearly independent real numbers (H' is to be thought of as a group of real numbers). It remains to be shown that $H/P \cong C_2 + C_2$ and $A(H) \cong C_2$. This is left to the reader. This example provides for groups H with rank r, $3 \leq r \leq \aleph$.

For an example such that the rank of H equals 2 we need only take

$$H = \left\{\frac{a_1}{3^n}, \frac{a_2}{5^n}, \frac{a_1+a_2}{7^n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

For an example of (iii) we proceed as follows. Take a system $\{a, b, c_\mu, d_\mu\}_\mu$ of linearly independent real numbers, μ running through a non-empty index set. Let $\{\varrho_\mu, \sigma_\mu, \tau_\mu\}_\mu$ be a system of characteristics such that they have only infinity and zero as values, the types of any two of them are incomparable, all σ_μ and τ_μ have zeros in the first three places, and ϱ_μ has infinity in the first place and zero in the second and third place. Moreover, for any μ, the products $\sigma_\mu\tau_\mu$, $\tau_\mu\varrho_\mu$, $\varrho_\mu\sigma_\mu$, the characteristics being considered as types, will be the null-type. Now we adjoin to $\{a, b, c_\mu, d_\mu\}_\mu$ real numbers as generating elements, as many as are necessary to make c_μ and d_μ of characteristic ϱ_μ, $a+c_\mu$ and $b+d_\mu$ of characteristic σ_μ, $a+d_\mu$ and $b+c_\mu$ of characteristic τ_μ, a and b infinitely often divisible by 3, and $a+b$ also infinitely often divisible by 2. The obtained group suffices.

By adjoining as new generating elements $\frac{e}{2^n}$ and $\frac{e+a+b}{5^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, such, that $\{a, b, c_\mu, d_\mu, e\}_\mu$ is still a linearly independent system, we obtain a group which suffices too. It has to be shown that $H/P \cong C_2$ (which is almost trivial) and $A(H) \cong C_2 \times C_2$ [this is shown by proving that all automorphisms $\mp\varepsilon$ and $\mp\mu$ of H are induced by one of the following mappings:

$$a \leftrightarrow b,\ c_\mu \leftrightarrow d_\mu,\ (e \leftrightarrow e); \qquad a \leftrightarrow -b,\ c_\mu \leftrightarrow -d_\mu,\ (e \leftrightarrow -e)].$$

This method provides groups H as required of rank r with $4 \leqq r \leqq \aleph$. Whether or not the rank can be 2 or 3 we do not know.

§ 4. Non-abelian groups

Throughout this section we shall denote by G a non-abelian group, while Z will stand for the centre of G.

If G is any non-abelian group, then neither $A(G)$ not G/Z, which is isomorphic to the group of inner automorphisms of G, can be cyclic. So the smallest groups coming into account for G/Z to be isomorphic to are $C_2 \times C_2$ and $\mathfrak{S}_3$.

If $G/Z \cong \mathfrak{S}_3$, we have the well-known example:

$$G \cong \mathfrak{S}_3, \quad \text{then} \quad A(G) \cong G/Z \cong \mathfrak{S}_3.$$

Lemma 2. *If G is not isomorphic to $\mathfrak{S}_3$, and $G/Z \cong \mathfrak{S}_3$, then G always has outer automorphisms* (*so* $|A(G)| \geq 12$).

Proof. Since $\mathfrak{S}_3$ can be regarded as the group generated by $\{a, b\}$ with the relations $a^3 = e$, $b^2 = e$, $ab = ba^2$, we can write G as follows as the union of its cosets to Z:

$$G = \{Z, aZ, a^2Z, bZ, abZ, a^2bZ\}, \quad |Z| \geq 2.$$

One easily confirms that the mapping φ induced by $\varphi a = a^{-1}$, $\varphi b = b^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ $(z \in Z)$, is an outer automorphism of G, unless Z is a direct product of cycles of order 2 and $b^2 = e$.

In this case the mapping defined by $\varphi a = a$, $\varphi b = bz_1$, $\varphi z = z$ for all $z \in Z$, while z_1 is any fixed element of Z $(z_1 \neq e)$, induces an outer automorphism of G.

In the case that $G/Z \cong C_2 \times C_2$, we have the following lemma:

Lemma 3. *If $G/Z \cong C_2 \times C_2$, then G has outer automorphisms, so* $|A(G)| \geq 8$.

Proof. We write G as the union of its cosets to Z:

$$G = \{Z, aZ, bZ, abZ\}.$$

The derived group G' of G has order 2 and $G' \subset Z$. The mapping defined by $\varphi a = a^{-1}$, $\varphi b = b^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ (all $z \in Z$) is an automorphism of G. This automorphism φ has order 2 and commutes with all inner automorphisms. φ is an outer automorphism, unless Z is a direct product of cycles of order 2 and $a^2, b^2 \in G'$ (using the general fact that the inner automorphism ψ of a non-abelian group induced by the element y can be represented by $\psi x = x[x, y]$, $[x, y]$ being the commutator of x and y).

If this is the case then we distinguish between the following two cases: (i) $a^2 = b^2$, (ii) $a^2 \neq b^2$ (e.g. $b^2 \neq e$). In case (i) the mapping φ induced by $\varphi a = b$, $\varphi b = a$, $\varphi z = z$ $(z \in Z)$, in case (ii) the mapping φ induced by $\varphi a = ab$, $\varphi b = b$, $\varphi z = z$ $(z \in Z)$ turns out to be an outer automorphism.

From these two lemmas we immediately get:

Theorem 6. *Every non-abelian group, Ξ_3 excepted, has an automorphism group with order* ≥ 8.

The next groups coming into account for G/Z to be isomorphic to are the groups of order 8.

Lemma 4. *If* $|G/Z| = 8$, *then* G *always has outer automorphisms.*

Proof. There are 4 non-cyclic groups of order 8. The quaternion group Q cannot be isomorphic to G/Z, since otherwise G can be regarded as the group generated by Z and $\{a, b\}$ with the relations $a^4 \in Z$, $b^4 \in Z$, $a^2 = b^2 c$, $c \in Z$; then the element $a^2 = b^2 c$ commutes with all elements of G, so it does not induce an inner automorphism different from the identity, as it is supposed to do.

Suppose now $G/Z = C_2 \times C_4$. Then G can be regarded as the group generated by Z and $\{a, b\}$ with the relations $a^2 \in Z$, $b^4 \in Z$, while the derived group G' of G has order 2. Then $[a, b^2] = [a, b]^2 = e$, so b^2 commutes with all elements of G, and the inner automorphism it induces, is equal to the identity.

So neither Q, nor $C_2 \times C_4$ can be isomorphic to G/Z. The only two groups of order 8 which as yet can be isomorphic to G/Z are therefore D and $C_2 \times C_2 \times C_2$

We now assume $G/Z \cong D$. G can be written as the union of its cosets to Z:

$$G = \{Z, aZ, a^2Z, a^3Z, bZ, abZ, a^2bZ, a^3bZ\},$$

with the relations $a^4 \in Z$, $b^2 \in Z$ and $a^3 b a^{-1} b^{-1} \in Z$. The derived group G' of G has order 4 and is cyclic, and $|Z| \geq 2$.

It is easy to verify that the mapping φ defined by $\varphi a = a^{-1}$, $\varphi b = b^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ (for all $z \in Z$), is an outer automorphism of G, unless Z is the direct product of cycles of order 2 and $a^2 \in G'$, $b^2 \in G'$. In this case, however, the mapping φ defined by $\varphi a = a z_1$, $\varphi b = b$, $\varphi z = z$ (for all $z \in Z$), for any fixed element $z_1 \in Z$ $(z_1 \neq e)$, is an outer automorphism of G.

In the case where $G/Z \cong C_2 \times C_2 \times C_2$, the derived group G' of G has at most 8 elements, all of order 2, and contains a subgroup of order 4, which is isomorphic to $C_2 \times C_2$. G can be regarded as the group generated by Z and $\{a_1, a_2, a_3\}$, while $a_1^2 \in Z$, $a_2^2 \in Z$, $a_3^2 \in Z$ and G' is contained in Z.

Consider the automorphism φ induced by $\varphi a_1 = a_1^{-1}$, $\varphi a_2 = a_2^{-1}$, $\varphi a_3 = a_3^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ $(z \in Z)$. If φ is accidently an inner automorphism, then all elements of Z have order 2, and $a_i^2 \in G'$ $(i = 1, 2, 3)$. Then if either exactly one of the a_i^2 is equal to e, say $a_1^2 = e$, or exactly one of the a_i^2 is unequal to e, say $a_1^2 \neq e$, then the mapping ψ induced by $\psi a_1 = a_1$, $\psi a_2 = a_3$, $\psi a_3 = a_2$ can, in an obvious way, be extended to an outer automorphism of G. If all of the a_i^2 are equal or all of the a_i^2 are unequal to e, then ψ gives an outer automorphism too, after suitable renumeration of the a_i. So in any case G has outer automorphisms.

Theorem 7. *If the automorphism group* $A(G)$ *of a non-abelian group* G *has order* 8, *then either* $G \cong D$, *or* $|G|$ *is infinite and* $A(G) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$.

Proof. It follows from lemma 4 that G/Z is isomorphic to $C_2 \times C_2$. We then always get an outer automorphism of order 2, which commutes with the inner automorphisms, unless Z is a direct product of cycles of order 2 and all squares of elements of G are contained in the derived group G', as follows from the proof of lemma 3.

First we consider the last case. If $|Z| = 2$, then G is either isomorphic to D, or to Q. If $G \cong D$, we have $A(G) \cong D$. If $G \cong Q$, then $|A(G)| = 12$. If $|Z| > 2$, we get more than 8 automorphisms, for every automorphism of Z, which leaves G' invariant, induces an outer automorphism of G.

Now we assume that Z is not the direct product of cycles of order 2. Then $A(G)$ should be isomorphic to $C_2 \times C_2 \times C_2$, and $|G| > 8$. E. SCHENKMAN [5] proved that if any group H is a finite nilpotent group of class 2, then the order of H divides the order of $A(H)$. G is a nilpotent group of class 2. In our case, however, we have $|A(G)| = 8$, while $|G| > 8$, so $|G|$ must be infinite. Q. e. d.

Now we give an example of a group G as last mentioned. Z will be (for the moment additively written) $C_2 + H$,

$$H = \left\{ \frac{s_1}{3^n}, \frac{s_2}{5^n}, \frac{s_1 + s_2}{7^n} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

s_1 and s_2 being two linearly independent real numbers. The additional generators of G will be a_1 and a_2 with, apart from the commutation relations of a_1 and a_2 with the elements of Z, the additional relations

$$a_1^2 = s_1, \quad a_2^2 = s_2, \quad a_1 a_2 = a_2 a_1 c$$

where c is the element of order 2 of Z.

It should be observed that (i) in this way no relations are added to Z, (ii) the automorphism group of H is isomorphic to C_2, (iii) any automorphism of G induces an automorphism of H. All outer automorphisms are obtained by multiplying the outer automorphism φ induced by $\varphi a_1 = a_1 s_1^{-1}$, $\varphi a_2 = a_2 s_2^{-1}$, $\varphi z = z^{-1}$ $(z \in Z)$, by the inner automorphisms.

References

[1] BOGNÁR, M.: Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen. Publ. Math. Debrecen **4**, 509–511 (1956). — [2] GROOT, J. DE: Indecomposable abelian groups. Indag. Math. **19**, 137–145 (1957). — [3] KUROSH, A. G.: The theory of groups, 2nd edit. (Translated from the Russian). New York 1956. — [4] MILLER, G. A.: On the groups which have the same group of isomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 395–401 (1900). — [5] SCHENKMAN, E.: The existence of outer automorphisms of some nilpotent groups of class 2. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 6–11 (1955).

Mathematical Institute, University of Amsterdam (Netherlands)

(Eingegangen am 14. August 1957)

Baumslag, G.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 465–478 (1958)

Finite Factors in Infinite Ascending Derived Series

By
Gilbert Baumslag

§ 1. Introduction

A properly descending series of groups

$$G_0 > G_{-1} > G_{-2} > \cdots \tag{1.1}$$

is a *"descending derived series"* if the derived group of G_{-i} coincides with G_{-i-1} i.e. $G'_{-i} = G_{-i-1}$, for $i = 0, 1, \ldots$. The series (1.1) is of length n if it contains $n+1$ terms. If n is infinite then (1.1) is an *"infinite descending derived series"*.

The converse notion to that of a descending derived series has been defined by B. H. Neumann [1] as follows: A properly ascending series of groups

$$H_0 < H_1 < H_2 < \cdots \tag{1.2}$$

is termed an *"ascending derived series"* if $H'_{i+1} = H_i$ for $i = 0, 1, \ldots$. The series is of length n if it contains $n+1$ terms. If n is infinite then (1.2) is called an *"infinite ascending derived series"*, which for the sake of brevity we shall call an *"iads"*.

B. H. Neumann [1] has shown that if (1.2) is an iads then no metabelian factor group H_{i+2}/H_i can be finitely generated (we shall refer to this result as Neumann's Theorem). However he constructs an iads in which there is just one abelian factor H_{j+1}/H_j of finite order. This raises the question whether an iads may have more than one finite abelian factor and if so, whether it may have infinitely many such finite factors. It is with the existence and multiplicity of finite factors in an iads that this paper is concerned.

We shall construct an iads (1.2) having H_{2k+1}/H_{2k} finite of order n_k; in the sequence $n_0, n_1, \ldots$ every two consecutive terms are coprime, and apart from this the terms are arbitrary positive odd integers. Hence we can construct continuously many different iads having infinitely many finite factors.

The results of P. Hall [2] concerning the orders of the abelian factors in the derived series of a finite p-group (a p-group is a group in which every element has order a power of the same prime p) might suggest that if an iads had infinitely many finite factors then the orders of these finite factors would be unbounded. However this is not always the case, for a suitable choice of the integers n_k (above) leads to an iads with infinitely many finite factors whose orders are bounded. Conversely the n_k may so be chosen as to lead to an iads having infinitely many finite factors whose orders are unbounded.

I express my thanks to Dr. B. H. NEUMANN for his generous help, guidance and encouragement, and my gratitude and appreciation to my Parents to whom this opportunity for further study is due.

§ 2. Preliminaries

The group generated by the set X with defining relations R will be denoted by $G = G\mathfrak{p}(X; R)$; the centre of G will be denoted by $C(G)$. The cardinal of the set S will be written $|S|$; and the order of the group G will be written $|G|$. An isomorphic copy of G will be written as G_i and the element in G_i corresponding to $g \in G$ will be denoted by g_i. The restricted direct power of G indexed by the set I or equivalently, the restricted direct product of the copies G_i of G where $i \in I$, will be written $\prod_{i \in I} G_i$.

The notion of a restricted direct product of groups with amalgamated subgroups has been introduced by B. H. NEUMANN and H. NEUMANN [3]; we shall use a particular case in which the component groups are all the same. This may be defined as follows: Let $M = \prod_{i \in I} G_i$ and $N = G\mathfrak{p}(c_i \cdot c_j^{-1};\ c \in C(G),$ all $i, j \in I)$. Since N is a normal subgroup of M we may form the factor group $W = M/N$. Then W is the *"restricted direct power of G, indexed by the set I, with amalgamated centres"*; we shall write

$$W = \prod_{i \in I} G_i/\mathrm{a.c.}$$

It can easily be verified that $C(W) \cong C(G)$; we denote the element of $C(W)$ corresponding to $c \in C(G)$ again by c.

If f, g, h are elements of a group G, we denote the commutator of g and h by

$$g^{-1}h^{-1}gh = [g, h]$$

and the transform of g by h by

$$h^{-1}gh = g^h.$$

The following relations then hold:

$$[gf, h] = [g, h]^f \cdot [f, h] \quad \text{and} \quad [g, fh] = [g, h] \cdot [g, f]^h. \tag{2.1}$$

If $G' < C(G)$ then G is *"nilpotent of class two"* and for such groups equation (2.1) reduces to

$$[gf, h] = [g, h] \cdot [f, h] \quad \text{and} \quad [g, fh] = [g, h] \cdot [g, f]. \tag{2.2}$$

For nilpotent groups of class two, a repeated application of (2.2) leads to

$$[g^m, h^n] = [g, h]^{m \cdot n}, \tag{2.3}$$

m and n integers.

The r-th derived group of G will be written $G^{(r)}$; thus $G^{(r+1)} = (G^{(r)})'$.

The following lemma is stated for future reference. The proof is straightforward and is omitted.

LEMMA 2.4. *If θ is an homomorphism of the group G, then*

$$(G\theta)' = G'\theta.$$

Equivalently if N is a normal subgroup of the group G, then

$$(G/N)' = G'N/N.$$

§ 3. An auxiliary construction

We shall make use of a particular type of finite nilpotent groups of class two. They depend on two positive coprime integers m and n, and will be denoted by $B(m, n)$ or by B if m and n are understood. The derived group of $B(m, n)$ coincides with its centre and is cyclic of order m. The factor group with respect to this cyclic group is the direct product of $n-1$ cyclic groups of order m. Thus the order of $B(m, n)$ is

$$|B(m, n)| = m^n. \tag{3.1}$$

More precisely we put

$$B(m, n) = Gp(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, c; (3.3)) \tag{3.2}$$

with the defining relations

$$\begin{cases} a_1^m = a_2^m = \cdots = a_{n-1}^m = 1 = [a_1, c] = [a_2, c] = \cdots = [a_{n-1}, c], \\ [a_i, a_j] = c^{u(i,j)} \quad \text{where} \quad 1 \leq i < j \leq n-1, \ u(i,j) = (-1)^{j-i}. \end{cases} \tag{3.3}$$

One easily verifies that $B(m, n)$ has the structure described above.

LEMMA 3.4. *If m and n are both greater than 1 and odd, then the mapping ψ defined by*

$$a_1\psi = a_2, \ a_2\psi = a_3, \ \ldots, \ a_{n-2}\psi = a_{n-1},$$
$$a_{n-1}\psi = a_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-1}, \quad c\psi = c$$

can be extended to an automorphism φ of $B(m, n)$ of order n.

Proof. To show that ψ can be extended to an endomorphism φ we first show that the set

$$a_1\psi, \ a_2\psi, \ \ldots, \ a_{n-1}\psi,$$

satisfy the same relations as the corresponding a_i.

It follows immediately from the defining relations (3.3) that if $i, j < n-1$, then

$$(a_j\psi)^m = 1 \quad \text{and} \quad [a_i, a_j] = [a_i\psi, a_j\psi]. \tag{3.41}$$

We show that the equations (3.41) hold for all possible values of i and j. When $i = j$ the result is immediate; suppose then that $i \neq j$ and one of i, j is equal to $n-1$, say $j = n-1$. We have

$$(a_{n-1}\psi)^2 = (a_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-1})^2 = c^r a_1^{-2}a_2^{-2}\ldots a_{n-1}^{-2}$$

where $r = \frac{n-1}{2}$. It follows by induction that

$$(a_{n-1}\psi)^m = c^s a_1^{-m} a_2^{-m} \dots a_{n-1}^{-m},$$

where

$$s = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(m-1)m}{2}.$$

Since m and n are both odd and greater than 1, s is divisible by m; therefore

$$(a_{n-1}\psi)^m = 1.$$

Further, we have

$$\begin{aligned}[a_i\psi, a_{n-1}\psi] &= [a_{i+1}, a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}] \\ &= [a_1, a_{i+1}][a_2, a_{i+1}] \dots [a_i, a_{i+1}][a_{i+2}, a_{i+1}] \dots [a_{n-1}, a_{i+1}].\end{aligned}$$

When i is even, then

$$[a_1, a_{i+1}][a_2, a_{i+1}] \dots [a_i, a_{i+1}] = 1 = [a_{i+2}, a_{i+1}][a_{i+3}, a_{i+1}] \dots [a_{n-2}, a_{i+1}]$$

since in each product there are an even number of terms with consecutive terms inverse to each other. It follows from $[a_{n-1}, a_{i+1}] = c$ that the expression obtained for $[a_i\psi, a_{n-1}\psi]$ reduces to c; consequently we have

$$[a_i, a_{n-1}] = c = [a_i\psi, a_{n-1}\psi].$$

When i is odd a similar procedure yields

$$[a_i, a_{n-1}] = c^{-1} = [a_i\psi, a_{n-1}\psi].$$

In the cases where $i = n-1$ and $j < n-1$ analogous arguments lead to the same results; thus the $a_i\psi$ satisfy the same relations as the a_i. We can therefore extend the mapping ψ to an endomorphism φ of B.

We show next that φ has order n. Suppose $1 \leq j \leq n-1$ and write $j = n-k$. Then

$$\begin{aligned}a_{n-k}\varphi^n &= \left(((a_{n-k}\varphi^{k-1})\varphi)\varphi\right)\varphi^{n-k-1} \\ &= \left((a_{n-1}\varphi)\varphi\right)\varphi^{n-k-1} \\ &= \left((a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1})\varphi\right)\varphi^{n-k-1} \\ &= a_1\varphi^{n-k-1} \\ &= a_{n-k}.\end{aligned}$$

Therefore φ^n leaves every generator a_j fixed; hence φ^n leaves every element of B fixed, i.e. φ^n is the identity transformation and φ has order n. Thus, finally, φ has both a left and a right inverse, namely φ^{n-1}, and is therefore a $(1-1)$ endomorphism of B onto B, i.e. an automorphism of B. This completes the proof of the lemma.

LEMMA 3.5. *Under the conditions of Lemma* 3.4 *the automorphism* φ *has the property*

$$Gp(b^{-1}b\varphi; b \in B) = B.$$

Proof. Let $A = G\not{p}(b^{-1}b\varphi;\ b\in B)$. We prove $A = B$. First we show that $c\in A$. To do this we have to consider the following two possibilities:

i) $n = 3$:

We have $a_1^{-1}a_1\varphi = a_1^{-1}a_2\in A$ and $a_2^{-1}a_2\varphi = a_2^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}\in A$. Further $[a_1^{-1}a_2,\ a_2^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}] = c^{-3}\in A$. Now c is a power of c^{-3} since the order of c is prime to 3; hence $c\in A$.

ii) $n > 3$:

We have $a_1^{-1}a_1\varphi = a_1^{-1}a_2\in A$ and $a_3^{-1}a_3\varphi = a_3^{-1}a_4\in A$. It follows that $[a_1^{-1}a_2,\ a_3^{-1}a_4] = c^{-4}\in A$, and, since 4 is prime to m, we have $c\in A$.

The two cases above lead to $c\in A$. In computing A we shall now work modulo $G\not{p}(c;\ c^m = 1)$. From

$$(b^{-1}b\varphi)\varphi = (b\varphi)^{-1}(b\varphi)\varphi$$

it follows that $A\varphi < A$ and since $|B| < \infty$, $A\varphi = A$. Therefore to prove $A = B$ it is sufficient to show that $a_1\in A$. We have

$$a_{n-1}^{-1}a_{n-1}\varphi = a_1^{-1}a_2^{-1}\ldots a_{n-1}^{-2}\in A\,.$$

Multiplying the right hand side of this equation successively by

$$a_{n-1}^{2}a_{n-2}^{-2},\quad a_{n-2}^{3}a_{n-3}^{-3},\ \ldots,\ a_2^{n-1}a_1^{-(n-1)}$$

all of which belong to A, we arrive at

$$a_1^n\in A\,.$$

Since m and n are coprime, a_1 is a power of a_1^n and hence $a_1\in A$. It follows that $A = B$, which concludes the proof of the lemma.

§ 4. The method of construction

We now introduce a constructional procedure which extends the notion of the "*Crown Product*" defined by B. H. NEUMANN in [*1*]. It will be referred to as the "§ 4 *construction*".

Let G be a group whose centre has a cyclic subgroup Z of order n, where n is an odd integer greater than 1; let m be another odd integer greater than 1 such that $(m, n) = 1$, and put $B(m, n) = B$. Let S be a transversal of G modulo Z (a transversal of G modulo Z is a complete set of coset representatives of G modulo Z) with the unit $e\in S$, and z a generator of Z; then every $g\in G$ has a unique representation in the form

$$g = z^i s,\quad 0\leq i\leq n-1,\quad s\in S. \tag{4.1}$$

We now form the restricted direct power of B amalgamating the centres, the number of factors being taken equal to $|S|$, and we use the elements of S

to index the copies of B; thus we form the group

$$W = \prod_{s \in S} B_s / \text{a.c.} \tag{4.2}$$

Our next objective is to show that W possesses a group of automorphisms isomorphic to G, and finally the construction will be accomplished by forming the splitting extension of W by this automorphism group.

The automorphism φ defined in Lemma 3.4 can be applied to every isomorphic copy B_s of B in the product (4.2); whatever B_s it is applied to its effect on the amalgamated centre is the same, namely that of the identity. We can therefore define an automorphism ζ which induces φ simultaneously in each copy B_s. We make this automorphism ζ correspond to the element $z \in G$; notice that both z and ζ have the same order n. Next we define to each $g \in G$ a mapping $\sigma = \sigma(g)$ of W into itself; first if $b_t \in B_t$ we put

$$b_t \sigma = b_u \zeta^i, \tag{4.3}$$

where u and i are uniquely defined [cf. (4.1)] by

$$tg = z^i u \tag{4.4}$$

and where b_u corresponds to b_t under the isomorphism between B_u and B_t underlying the formation of the direct power (4.2). We can then extend the operation of σ to the whole of W in the obvious manner, that is by defining

$$\left(\prod_{t \in S} b_t\right)\sigma = \prod_{t \in S} (b_t \sigma), \tag{4.5}$$

where the symbol $\prod$ denotes a finite product. It is, at first sight, possible that this extension of σ to the whole of W is not properly defined; that is the effect of σ on two different representations of an element $w \in W$ may be different. Lemma 4.6 shows that this is not the case.

LEMMA 4.6. *The mapping σ is single-valued.*

Proof. We have to show that if

$$w' = \prod_{t \in S} b_t \tag{4.61}$$

is some representation for $w \in W$, then the effect of σ on w is independent of the representation w' of w. It is sufficient to show that any representation for the unit element $1 \in W$ is mapped into 1 by σ.

Let (4.61) be a representation for 1; then

$$b_t = z^{\beta_t} \quad \text{and} \quad \Sigma \beta_t \equiv 0 \bmod n.$$

It follows from the fact that ζ leaves z fixed that σ also leaves z fixed and hence σ leaves each factor in the representation (4.61) unchanged; i.e. $w'\sigma = w'$ and $1\sigma = 1$ independently of which representation w' is chosen for 1. It follows now that σ is a single-valued mapping of W into W.

We shall now show that $\sigma = \sigma(g)$ is an automorphism of W for every $g \in G$. The proof of this fact is simplified by introducing a further lemma which will also be needed at a later stage.

LEMMA 4.7. *$\sigma(g\,g') = \sigma(g)\,\sigma(g')$ for any $g, g' \in G$.*

Proof. It follows from the definition of $\sigma(g)$ that to prove $\sigma(g\,g') = \sigma(g)\,\sigma(g')$ it is enough to show that

$$b_t\,\sigma(g\,g') = \big(b_t\,\sigma(g)\big)\,\sigma(g'),$$

where b and t are arbitrary elements of B and S respectively.

Using the unique decomposition of G modulo Z given by (4.1) we can write

$$t(g\,g') = z^i s, \quad s \in S \tag{4.71}$$

and

$$t\,g = z^j s', \quad s' \in S; \tag{4.72}$$

then

$$s'\,g' = z^{i-j} s. \tag{4.73}$$

The use of equation (4.71) yields

$$b_t\,\sigma(g\,g') = b_s \zeta^i. \tag{4.74}$$

The use of equation (4.72) and (4.73) yields

$$\left\{\begin{aligned} \big(b_t\,\sigma(g)\big)\,\sigma(g') &= (b_{s'}\zeta^j)\,\sigma(g') \\ &= (b_s \zeta^j)\,\zeta^{i-j} \\ &= b_s \zeta^i. \end{aligned}\right. \tag{4.75}$$

The right hand sides of equations (4.74), (4.75) coincide. The lemma therefore follows.

LEMMA 4.8. *The mapping $\sigma = \sigma(g)$ is an automorphism of W for every $g \in G$.*

Proof. That $\sigma(g)$ is an endomorphism follows from the definitions (4.3), (4.5) and Lemma 4.6. If e denotes the identity of G then clearly $\sigma(e)$ leaves every element of W fixed. Lemma 4.7 then gives

$$\sigma(g^{-1})\,\sigma(g) = \sigma(e) = \sigma(g)\,\sigma(g^{-1});$$

since $\sigma(e)$ is the identity automorphism it follows that $\sigma(g)$ has both a left and a right inverse $\sigma(g^{-1})$. Therefore $\sigma(g)$ is an automorphism of W. This concludes the proof.

We see from Lemmas 4.7, 4.8, that the mapping $g \to \sigma(g)$ is a homomorphism of G onto a subgroup of the group of all automorphisms of W. It is in fact an isomorphism since the kernel is trivial; for if $g \neq e$ and $b \in B$, $b \notin C(B)$ then $\sigma(g)$ does not leave b_e fixed.

We have reached a stage where we are able to complete the description of the constructional procedure that is the object of this section; for it is now possible to form the splitting extension V of W by G. The group V may be defined as the set of all pairs $v=(g, w)$ where $g \in G$ and $w \in W$, with the law of composition

$$(g_1, w_1) \cdot (g_2, w_2) = (g_1 g_2, w_1 \sigma(g_2) w_2) .$$

We shall write

$$V = G \cdot W ,$$

and denote the elements of V simply by an unbracketed pair gw omitting the g or the w if one of them happens to be the identity of G or W respectively.

§ 5. The derived series of V

In this section we assume the notation developed in § 4. We investigate the dependence of the derived series of V on that of the derived series of G, with $B(m, n)$ remaining constant throughout. We assume further that the cyclic subgroup of order n in the centre of G (which enters the § 4 construction) is the last non-trivial term of the derived series of G; that is to say, we assume that G is a solvable group of derived length $r>1$, and that $G^{(r-1)}$ is cyclic of order n and lies in the centre of G.

The following lemma shows that the derived length of V is the sum of the derived lengths of W and G, i.e. it is of length $r+2$.

LEMMA 5.1. *If u is a positive integer then*

$$V^{(u)} = G^{(u)} \cdot W^{(u')},$$

where

$$u' = 0 \quad \text{if} \quad u \leq r$$

and

$$u' = u - r \quad \text{if} \quad u > r,$$

and $W^{(0)} = W$.

Proof. Consider the series of groups

$$1 < W' < W < G^{(r-1)} \cdot W < G^{(r-2)} \cdot W < \cdots < G \cdot W = V \tag{5.11}$$

We shall show that (5.11) is an ascending derived series.

We begin by proving

$$(G^{(r-1)} \cdot W)' = W. \tag{5.12}$$

Since $G^{(r-1)}$ is abelian, the isomorphism

$$G^{(r-1)} \cdot W/W \cong G^{(r-1)},$$

yields

$$(G^{(r-1)} \cdot W)' \leq W. \tag{5.13}$$

It remains to prove the reverse inequality. To do so we first recall that $G^{(r-1)} = G\mathfrak{p}(z; z^n = e)$. Now let $b_t \in B_t$ and consider the commutator

$$\begin{aligned} w &= [z, b_t] \\ &= z^{-1} b_t^{-1} z\, b_t \\ &= b_t^{-1} \sigma(z)\, b_t \\ &= b_t^{-1} \varsigma\, b_t \\ &= (b^{-1} \varphi\, b)_t. \end{aligned}$$

Now by Lemma 3.5, $G\mathfrak{p}(b^{-1} b\varphi;\ b \in B) = B$; hence

$$G\mathfrak{p}(b^{-1}\varphi\, b = (b^{-1} b\varphi)^{-1}; b \in B) = B.$$

Consequently the commutators $[z, b_t]$ generate W and so

$$(G^{(r-1)} \cdot W)' \geqq W. \tag{5.14}$$

The inequalities (5.13) and (5.14) now give us the desired equality (5.12).

Now, for $j = 0, 1, \ldots, r-1$, we have an isomorphism

$$(G^{(r-j-1)}) \cdot W / G^{(r-j)} \cdot W \cong G^{(r-j-1)} / G^{(r-j)},$$

and so

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' \leqq G^{(r-j)} \cdot W. \tag{5.15}$$

Clearly

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' \geqq G^{(r-j)};$$

combining this inequality with (5.12) we get

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' \geqq G^{(r-j)} \cdot W.$$

This is the reverse inequality to (5.15); consequently

$$(G^{(r-j-1)} \cdot W)' = G^{(r-j)} \cdot W$$

for $j = 0, 1, \ldots, r-1$, and so the series (5.11) is an ascending derived series; the lemma now follows directly from this observation.

In the main construction that follows in § 7, we choose G to be a group of derived length $r = 2$. For convenience we state a particular case of Lemma 5.1 as part of an immediate corollary to this lemma:

Corollary 5.2. *If G is nilpotent of class two, then*

$$V'' = W$$

and

$$V'/V'' \cong G'.$$

We note that Corollary 5.2 implies that $V''' = W'$; it is therefore finite of order m. Further V'/V'' is finite of order n since G' is itself finite of order n.

§ 6. A double sequence of groups

We now describe a construction of groups depending on a finite or infinite index set J and on a finite or infinite sequence of parameters $n_0, n_1, \ldots, n_k$; these are to be positive odd integers, every consecutive pair of them being coprime:

$$(n_i, n_{i+1}) = 1 \quad \text{for } i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

The construction is inductive over the number of parameters and utilises the § 4 construction. The groups to be constructed will be denoted by $V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$.

We begin with $k = 1$, and define $V(n_0, n_1, J)$ to be the direct power of groups $B(n_0, n_1)$ indexed by J with the centres of order n_0 amalgamated:

$$V(n_0, n_1, J) = \prod_{j \in J} B_j(n_0, n_1)/\text{a.c.}$$

Observe that $V(n_0, n_1, J)$ has cyclic centre of order n_0.

Now assume that we have already defined the groups $V(n_0, n_1, \ldots, n_l, J)$ for $1 \leqq l < k$, and that they have cyclic centres of order n_0. To construct $V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$ we put

$$V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) = G$$

and

$$B(n_0, n_1) = B,$$

and apply the § 4 construction to B and G. This is possible because — by our hypothesis — the centre of G is cyclic of order n_1 and n_0, n_1 are odd and coprime.

LEMMA 6.1. *$V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$ is isomorphic to the splitting extension of $V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ by $V(n_{k-1}, n_k, J)$, with J' the product set of J and a transversal of $B(n_{k-1}, n_k)$ modulo its centre.*

Proof. Consider the group $V(n_0, n_1, \ldots, n_l, J)$. When $l = 2$, we have, by definition of $V(n_0, n_1, n_2, J)$ and $V(n_0, n_1, J')$,

$$\begin{aligned} V(n_0, n_1, n_2, J) &= V(n_1, n_2, J) \cdot \Big(\prod_{j' \in J'} B_{j'}(n_0, n_1)/\text{a.c.} \Big) \\ &= V(n_1, n_2, J) \cdot V(n_0, n_1, J'), \end{aligned}$$

J' being a transversal of $V(n_1, n_2, J)$ modulo its centre. By definition

$$V(n_1, n_2, J) = \prod_{j \in J} B_j(n_1, n_2)/\text{a.c.}$$

Hence the cardinal of J' coincides with that of

$$J \times [\text{a transversal of } B(n_1, n_2) \text{ modulo its centre}];$$

thus the lemma follows when $l = 2$.

We may therefore proceed by induction over l. Suppose the result holds for $1 \leq l < k$. Now

$$V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J) = V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) \cdot (\prod B_s(n_0, n_1)/\text{a.c.})$$

where S is a transversal of $V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J)$ modulo its centre. By the inductive hypothesis

$$V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) \cong V(n_{k-1}, n_k, J) \cdot V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J'),$$

where J' is the product of J and a transversal of $B(n_{k-1}, n_k)$ modulo its centre. Therefore

$$(6.11)\quad \begin{cases} V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J) \\ \qquad \cong \big(V(n_{k-1}, n_k, J) \cdot V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J')\big) \cdot (\prod B_s(n_0, n_1)/\text{a.c.}) \\ \qquad \cong V(n_{k-1}, n_k) \cdot \big(V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J') \cdot (\prod B_s(n_0, n_1)/\text{a.c.})\big). \end{cases}$$

From the method of construction one can establish a one-to-one correspondence between S and a transversal of $V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J')$ modulo its centre; therefore the group representing the second term in the equation (6.11) is isomorphic to $V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ and the lemma follows.

Corollary 6.2. *If J is infinite then the cardinal of J' is the same as the cardinal of J.*

Proof. J' is the product of an infinite set J and a finite set.

LEMMA 6.3. *If $k > 1$, then the second derived group of $V = V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$ is isomorphic to $R = V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$, J' as in the preceding lemma.*

Proof. Suppose $k = 2$. Then by definition

$$V(n_0, n_1, n_2, J) = V(n_1, n_2, J) \cdot V(n_0, n_1, J').$$

By Corollary 5.2,

$$\big(V(n_0, n_1, n_2)\big)'' \cong V(n_0, n_1, J').$$

So we have a basis for induction. Suppose then that the second derived group of $V(n_0, n_1, \ldots, n_l, J)$ is isomorphic to $V(n_0, n_1, \ldots, n_{l-1}, J')$ for $1 \leq l < k$. Then invoking Lemma 6.1,

$$(6.31)\qquad V \cong V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J) \cdot V(n_0, n_1, J_0),$$

and by Lemma 5.1,

$$\begin{aligned} V'' &\cong \big(V(n_1, n_2, \ldots, n_k, J)\big)'' \cdot V(n_0, n_1, J_0) \\ &= V(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, J') \cdot V(n_0, n_1, J_0) \\ &\cong V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J') \\ &= R, \end{aligned}$$

where the index set J_0 is defined by the usual decomposition as exhibited in (6.31) and J' is as in Lemma 6.1. This completes the proof of the lemma.

It follows from the method of proof of Lemma 6.3 that

$$(V'/V'') \cong \big(V(n_{k-1}, n_k, J)\big)'; \tag{6.4}$$

consequently the factor group V'/V'' is finite of order n_{k-1}.

§ 7. The construction of ascending derived series

In this section we shall construct ascending derived series of arbitrarily large length; if the length of the series is finite, all the terms appearing in the series will be finite; if the series is infinite, all the terms appearing in the series will be infinite with the exception of the trivial group and the first non-trivial term, and this series will have infinitely many finite factors with infinite factors sandwiched in between the finite factors. The series are effectively obtained from the following lemma and its corollary.

LEMMA 7.1. *Given parameters $n_0, n_1, \ldots, n_k$ with $k > 1$ and an index set J', there is an index set J such that $R = V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ is isomorphic to the second derived group of $V = V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J)$, provided that $|J'|$ is of the form*

$$|J'| = (n_{k-1})^{n_k - 1} \cdot \mathfrak{n},$$

for some cardinal $\mathfrak{n}$.

Proof. Choose J to be of the form $|J| = \mathfrak{n}$. The result now follows by Lemma 6.3.

An immediate corollary of this lemma is:

Corollary 7.2. If J' is infinite, then $V(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}, J')$ is isomorphic to the second derived group of $V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J')$.

Lemma 7.1 and Corollary 7.2 have now placed us in a position to construct ascending derived series. These are obtained by repeatedly embedding groups R in supergroups V which have the property

$$V'' \cong R.$$

We proceed as follows: Choose a sequence of positive odd integers

$$n_0, n_1, \ldots \quad \text{with} \quad (n_k, n_{k+1}) = 1, \tag{7.3}$$

and a sequence of index sets

$$J_0, J_1, \ldots \quad \text{where} \quad |J_{k-1}| = (n_{k-1})^{n_k - 1} \cdot |J_k|. \tag{7.4}$$

By Lemma 7.1 it is possible to embed

$$H_{2k} = V(n_0, n_1, \ldots, n_k, J_{k-1})$$

in

$$H_{2(k+1)} = V(n_0, n_1, \ldots, n_{k+1}, J_k),$$

since

$$(H_{2(k+1)})'' \cong H_{2k}$$

because

$$|J_{k-1}| = (n_{k-1})^{n_k - 1} \cdot |J_k|,$$

for $k=1, 2, \ldots$. We identify H_{2k} with the second derived group $(H_{2k+2})''$ of H_{2k+2} for $k=1, 2, \ldots$.

Define

$$H_{2k-1} = (H_{2k})'$$

for $k=1, 2, \ldots$, and

$$H_0 = H_1';$$

then the series

$$H_0 < H_1 < \cdots \tag{7.5}$$

is an ascending derived series. Furthermore we see from the equation (6.4) that

$$|H_{2k+1}/H_{2k}| = n_k,$$

for $k=0, 1, \ldots$.

If the index sets J_k do not all have the same cardinal, the condition in (7.4) ensures that they are all finite. Hence $|J_0|$ is finite, and therefore has a finite number of factors. Thus the condition in (7.4) can hold for only finitely many k, say $k=0, 1, \ldots, k'$, and in this case the embedding process must terminate after k' steps; k' depends only on the magnitude of $|J_0|$ and the parameters $n_0, n_1, \ldots$. So when the index sets are finite, the ascending derived series (7.5) is necessarily of finite length and all of the terms occurring in the series are of finite order.

We can ensure that the ascending derived series (7.5) is an iads by proceeding as follows: We first choose the sequence in equation (7.3) to be infinite. Then we choose all the index sets J_k in (7.4) to have the same cardinal $\mathfrak{m}$, i.e. $|J_k| = \mathfrak{m}$ for $k=0, 1, \ldots$. The condition (7.4) is now automatically satisfied and Corollary 7.2 ensures the embeddability of H_{2k} in H_{2k+2} for $k=1, 2, \ldots$, the series $k=1, 2, \ldots$ being an infinite series. In this case the series (7.5) is an iads with infinitely many finite factors H_{2k+1}/H_{2k}, $k=0, 1, \ldots$. For the remainder of this section we shall assume that (7.5) is an iads.

The iads (7.5) depends on the chosen parameters (7.3), (7.4). The infinitely many finite factors H_{2k+1}/H_{2k} are of order n_k, for $k=0, 1, \ldots$. Since the parameters n_k need only be odd with consecutive terms coprime, it is possible to arrange that the orders n_k of the infinitely many finite factors are bounded. We may, for example, choose $n_{2k+1}=5$ and $n_{2k}=3$, $k=0, 1, \ldots$. It is not however possible to have $n_k=3$ for $k=1, 2, \ldots$ since BAUMSLAG [4] has proved that if G/G' is a cyclic p-group then G'' can be a cyclic p-group only if it is trivial. Furthermore the finite factors are, by NEUMANN'S Theorem, as close together as possible.

The situation in iads of this type, i.e. iads with infinitely many finite factors whose orders are bounded, is unexpected when viewed in the light of PHILIP HALL'S investigations concerning the orders of the abelian factors in the derived series of a finite p-group in [2].

We can also obtain iads with infinitely many finite factors with the orders of these finite factors unbounded. For example we may choose $n_k = p_k$, the k-th odd prime, for $k=0, 1, \ldots$.

A point of interest concerning iads with finite factors is that consecutive finite factors must have infinite factors sandwiched in between; this is, by NEUMANN'S Theorem, a necessary condition. It is this intermingling of finite and infinite that makes the study of iads more interesting than the study of infinite descending derived series, in which it is possible to have all the factor groups occurring in the series of finite order.

Finally, we state, without proof, that the requirement of the parameters n_k to be odd can be done away with. The construction is similar but more complicated.

References

[1] NEUMANN, B. H.: Ascending derived series. Compositio Mathematica **13**, 47—64 (1956). — [2] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933). — [3] NEUMANN, B. H., and HANNA NEUMANN: A remark on generalised free products. J. London Math. Soc. **25**, 202—204 (1950). — [4] BAUMSLAG, GILBERT: A theorem on infinite groups. Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 545—548 (1957).

Dept. of Math., The University, Manchester 13 (England)

(Eingegangen am 1. November 1956)

Tachikawa, H.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 479—487 (1958)

Duality Theorem of Character Modules for Rings with Minimum Condition

By
Hiroyuki Tachikawa

Introduction. The notion of dual modules was first introduced by Nesbitt-Thrall [7] in connection with commutator algebras of faithful representations of quasi-Frobenius algebras and was later used by Nagao-Nakayama [6] to construct injective modules over algebras. On the other hand the character module for a quasi-Frobenius ring was recently investigated by K. Morita and the author [5].

The notions of dual modules and character modules clearly depend on characteristic properties of rings over which they are defined, and in the case of quasi-Frobenius algebras they are really distinct; nevertheless, as the results of above writers show, the duality theorem of modules is known to hold for two kinds of rings: algebras of finite rank over a ground field and quasi-Frobenius rings. This makes us conjecture that it may be possible to find a connection between the notions of dual modules and character modules. In this paper we shall show that a ring for which the duality theorem of modules holds need not be an algebra or quasi-Frobenius ring, and in case of algebras the notion of dual modules is included in the notion of (generalized) character modules. It seems of interest that the duality theorem of modules holds for any ring with minimum condition.

Let A be a ring containing a unit element 1 and satisfying the minimum condition on left ideals. Assume that Q denotes an injective left A-module whose semi-simple part is a finitely generated, faithful A/A_N-module, where A_N denotes the radical of A. If B denotes the inverse A-homomorphism ring[1]) of Q, then Q is considered as a bimodule with A as a left operator domain and with B as a right operator domain. For a left A- (resp. right B-) module L (resp. R), the Q-character module, denoted by $\mathrm{Char}_Q L$ (resp. $\mathrm{Char}_Q R$), is defined as a right B- (resp. left A-) module consisting of all left A- (resp. right B-) homomorphisms of L (resp. R) into Q. Then the main theorem asserts in § 2 that if L is a finitely generated left A-module, there exists an A-isomorphism:

$$\mathrm{Char}_Q(\mathrm{Char}_Q L) \approx L$$

and in a suitable pairing (product) of L and $\mathrm{Char}_Q L$ with respect to Q the annihilator relations hold between submodules of L and $\mathrm{Char}_Q L$. As an immediate consequence we see that the inverse B-homomorphism ring of Q, i.e., the second commutator ring of A with respect to Q, is A itself.

[1]) We follow the notation of Artin-Nesbitt-Thrall [1, p. 41].

In case of algebras we shall show in § 3 that the dual module of a right A-module which is isomorphic to A can be taken as an injective module Q above and then for any module character module and dual module are isomorphic to each other.

In § 4 we shall consider the case where Q satisfies the descending chain condition. In this case it is proved that B satisfies the minimum condition on right ideals and Q is injective as a right B-module. Therefore the duality theorem of character modules is stated symmetrically with respect to finitely generated left A-modules and finitely generated right B-modules.

Throughout this paper the unit element of A is to act as identity operator on all modules considered.

The author wishes here to express hearty thanks to Prof. K. MORITA for his advices.

§ 1. Definitions and Preliminaries

To begin with we generalize the definition of character modules in [5]. Let A and B be associative rings and U a left A- and right B-module, and $a(ub)=(au)b$ for $a\in A$, $b\in B$ and $u\in U$. For left A-module L, a left A-homomorphism of L into U will be called a U-character of L. The set of all U-characters of L forms a right B-module under the following definitions of addition and multiplication:

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x), \qquad (\varphi b)(x)=\varphi(x)b \quad \text{for } x\in L,\ b\in B.$$

This right B-module will be called the U-character module and will be denoted by $\mathrm{Char}_U L$. For a right B-module R the character module of R is similarly defined; it is a left A-module.

Let L and R be a left A-module and a right B-module respectively. If for any element x of L and any element y of R there corresponds an element $u\in U$, denoted by (x,y), such that

$$(x+x',y)=(x,y)+(x',y), \qquad (x,y+y')=(x,y)+(x,y'),$$
$$(ax,y)=a(x,y), \qquad (x,yb)=(x,y)b,$$

for any $x,x'\in L$; $y,y'\in R$; $a\in A$; $b\in B$, then we shall say that L and R form a pair with respect to U. In this case we put

$$\mathrm{Ann}(L_0;R)=\{y\,|\,(x,y)=0, \quad \text{for all } x\in L_0\},$$
$$\mathrm{Ann}(R_0;L)=\{x\,|\,(x,y)=0, \quad \text{for all } y\in R_0\},$$

for $L_0\subset L$ and $R_0\subset R$. If $\mathrm{Ann}(L;R)=0$ and $\mathrm{Ann}(R;L)=0$, we shall say that L and R form an orthogonal pair with respect to U.

Then we have the following theorem and corollary which are essentially proved in [5, Theorem 1.1, Corollary 1.2 and 1.3]; we have only to replace "right A-module" there by "right B-module".

THEOREM 1.1. *Let the U-character modules of any simple left A-module and of any simple right B-module be simple. Suppose that a left A-module L and*

a right B-module R form an orthogonal pair with respect to U and one of L and R has a composition series. Then we have the following conclusion:

(a) $\quad \mathrm{Char}_U L \approx R, \qquad \mathrm{Char}_U R \approx L$

(b) $\quad \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; R\right); L\right) = L_0, \quad \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(R_0; L\right); R\right) = R_0;$

for any submodule L_0 of L and any submodule R_0 of R.

COROLLARY 1.2. *Under the assumption of Theorem 1.1, L/L_0 and* $\mathrm{Ann}\left(L_0; R\right)$, *as well as* $\mathrm{Ann}\left(R_0; L\right)$ *and R/R_0, form an orthogonal pair with respect to U, and each of these modules is isomorphic to the U-character module of the other in the respective pair. At the same time any U-character of a left A-submodule L_0 of L can be extended to a U-character of L.*

Assume that A is a ring possessing a unit element 1 and satisfying the minimum condition on left ideals. Let us denote the semi-simple part of a left A-module L by $S(L)$; here the semi-simple part of L means the largest submodule of L which is semi-simple, i.e. $S(L) = \{x \in L \mid A_N x = 0$, A_N is the radical of $A\}$. As is shown by K. MORITA, Y. KAWADA and the author [4] for any semi-simple left A-module C there exists an injective module Q such that $S(Q) \approx C$. For the sake of reader's convenience we shall restate a part of the results of [4] which will be used at the proofs in § 2.

COROLLARY 2.2[2]). Let L be a left A-module and Q an injective left A-module. If $S(L) \approx S(Q)$, there exists a monomorphism $\varphi: L \to Q$; in the case where L is also injective, L is isomorphic to Q.

THEOREM 4.1[2]). Let Q be an injective left A-module and L an arbitrary left A-module. If $S(Q)$ is faithful as a left A/A_N-module, then for any submodule L_0 of L we have

$$L_0 = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}\left(L, Q\right)\right); L\right)$$

where $\mathrm{Hom}(L, Q)$ means the set of all A-homomorphisms of L into Q and $\mathrm{Ann}\left(L_0; \mathrm{Hom}(L, Q)\right) = \{\varphi \mid \varphi(L_0) = 0, \varphi \in \mathrm{Hom}(L, Q)\}$, $\mathrm{Ann}\left(\Phi_0; L\right) = \{x \mid x \in L$, $\varphi_0(x) = 0$ for all $\varphi_0 \in \Phi_0\}$ for a subset Φ_0 of $\mathrm{Hom}(L, Q)$.

THEOREM 4.2[2]). Let Q be an injective left A-module. Let B and B' be the inverse A-homomorphism rings of Q and $S(Q)$ respectively. If we denote by B_N the set of all endomorphisms φ of Q such that $S(Q) \cdot \varphi = 0$[3]), then B_N is a two sided nilpotent ideal of B and residue class ring $B/B_N (= \bar{B})$ is isomorphic to B'; more precisely if $A_N^m = 0$, then $B_N^m = 0$.

§ 2. Duality theorem of character modules

Suppose that A is a ring with a unit element 1 and has the minimum condition on left ideals. Let us denote the radical of A by A_N and put $\bar{A} = A/A_N$.

Let Q be an injective left A-module such that the semi-simple part $S(Q)$ is finitely generated as a left $\bar{A}$-module. Then it is seen by Theorem 4.2 of [4] that the inverse A-homomorphism ring B of Q is semi-primary and, if

[2]) The numbers are same as in [4].

[3]) $S(Q) \cdot \varphi = \varphi(S(Q))$.

B_N denotes the radical of B (the maximal two sided nilpotent ideal), $B_N = \{\varphi \in B \mid S(Q)\,\varphi = 0\}$. We shall consider B as a right operator domain of Q, then Q becomes a two sided A-B-module. Hence we can define the Q-character modules for left A-modules and for right B-modules. We first prove

THEOREM 2.1. *Let Q be an injective left A-module whose semi-simple part is finitely generated and faithful as a left $\bar{A}$-module*[4]*. Then Q-character modules of any simple left A-module and of any simple right B-module are simple.*

The proof will be proceded by the following lemma which deals with the case of semisimple ring A.

LEMMA 2.2. *Let A be a semisimple ring, S a finitely generated, faithful left A-module and B the inverse A-homomorphism ring of S. For a left A- and right B-module S the S-character modules of any simple left A-module and of any simple right B-module are simple.*

PROOF. Let L be a simple left A-module. Since S is a faithful A-module there exists a submodule L_0 of S such that L_0 is isomorphic to L. Then we have a direct decomposition of S into L_0 and L_1: $S = L_0 \oplus L_1$. If β_0 is an endomorphism of S such that β_0 operates as identity on L_0 and $\beta_0(L_1) = 0$, then β_0 is a primitive idempotent element of B. From the assumption that A is semisimple, B is a semisimple ring and every left A-homomorphism of L_0 into S can be extended to a endomorphism of S. Hence $\mathrm{Char}_S L_0 \approx B/(1-\beta_0)\,B$. Therefore $\mathrm{Char}_S L_0$ is a simple right B-module and consequently $\mathrm{Char}_S L$ is also simple.

We can similarly prove that S-character module of any simple right B-module is simple, since the inverse B-homomorphism ring of S is A. This completes the proof.

PROOF OF THEOREM 2.1. For any simple left A-module L there exists a primitive idempotent e of A for which $L \approx A/A(1-e) + A_N$. Let φ be a Q-character of $A/A(1-e) + A_N$. If $\varphi(\bar{1}) = x \in Q$, where $\bar{1}$ means the residue class of 1 modulo $A(1-e) + A_N$, then from the definition of character modules we see that the Q-character module of $A/A(1-e) + A_N$ is isomorphic to the right B-submodule $R = \{x \mid \varphi(\bar{1}) = x,\ x \in Q\}$ of Q, for the correspondence $\varphi \to \varphi(\bar{1}) = x$ is one-to-one. Since the Q-character φ is a left A-homomorphism it follows that x must be contained in $S(Q)$ because $\varphi(A_N \cdot \bar{1}) = A_N \cdot \varphi(\bar{1}) = A_N \cdot x = 0$. Therefore φ may be considered as a $S(Q)$-character[5] of $A/A(1-e) + A_N \approx \bar{A}/\bar{A}(\bar{1} - \bar{e})$, and left A-modules $S(Q)$ and $A/A(1-e) + A_N$ may be also considered as $\bar{A}$-modules in an obvious way. In this case by Theorem 4.2 of [4] the inverse A-homomorphism ring of $S(Q)$ is $\bar{B}$. Thus the proof is reduced to the case where A is semisimple. Lemma 2.2 assures that $\mathrm{Char}_Q(A/A(1-e) + A_N)$ is simple as $\bar{B}$-module. Hence the Q-character module of any simple left A-module is simple right B-module.

Next we consider the Q-character module of a simple right B-module. To show that the computation above is available for this case, it is sufficient

[4] Such injective modules really exist, cf. [4, Lemma 3.4].

[5] $S(Q)$ is considered as a left A- and right B-module.

to prove that $\mathrm{Ann}(B_N; Q) = S(Q)$. By Theorem 4.1 of [4] we have $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(S(Q); B); Q) = S(Q)$. Since $\mathrm{Ann}(S(Q); B) = B_N$ it holds that $\mathrm{Ann}(B_N; Q) = S(Q)$. This completes the proof.

In what follows we shall always denote by ${}_AA$ and B_B the ring A itself considered as a left A-module and the ring B itself considered as a right B-module respectively.

THEOREM 2.3. *Let Q be an injective left A-module whose semi-simple part is a faithful left A-module. If we put*

$$(a, \varphi) = \varphi(a) \qquad \text{for } a \in {}_AA,\ \varphi \in \mathrm{Char}_Q({}_AA),$$

then ${}_AA$ and $\mathrm{Char}_Q({}_AA)$ forms an orthogonal pair with respect to Q.

PROOF. Since Q-characters mean left A-homomorphisms it is clear that $\mathrm{Ann}({}_AA; \mathrm{Char}_Q({}_AA)) = 0$. Since for any element $x \in Q$ there exists a Q-character φ_x such that $\varphi_x(1) = x$ it follows that $(a, \varphi) = 0$ for all $\varphi \in \mathrm{Char}_Q({}_AA)$ if and only if $ax = 0$ for all $x \in Q$. Hence it suffices to show that Q is a faithful A-module. On the other hand we have by Corollary 2.2 of [4] that $Q^{(n)} (= Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n,\ Q_i \approx Q)$ for suitable positive integer n contains a submodule V isomorphic to ${}_AA$. Hence $Q^{(n)}$ is faithful, and consequently Q is also faithful. Thus $\mathrm{Ann}(\mathrm{Char}_Q({}_AA); {}_AA) = 0$. This complete the proof.

THEOREM 2.4. *Under the assumption of Theorem 2.3 the inverse B-homomorphism ring of Q is A.*

PROOF. By the correspondence $\varphi \leftrightarrow \varphi(1)$, for all $\varphi \in \mathrm{Char}_Q({}_AA)$, $\mathrm{Char}_Q({}_AA) \approx Q_B$ (Q_B means Q as a right B-module). On the other hand by Theorem 2.1, 2.3 and 1.1 we have $\mathrm{Char}_Q(\mathrm{Char}_Q({}_AA)) \approx {}_AA$. Thus $\mathrm{Char}_Q(Q_B) \approx {}_AA$.

Now let $A^{(n)}$ be a direct sum of n left A-modules ${}_AA$ and let $Q^{(n)}$ be a direct sum of n right B-module Q_B:

$$A^{(n)} = {}_AA \oplus {}_AA \oplus \cdots \oplus {}_AA, \qquad Q^{(n)} = Q_B \oplus Q_B \oplus \cdots \oplus Q_B.$$

Then by Theorem 2.3 $A^{(n)}$ and $Q^{(n)}$ form an orthogonal pair with respect to Q; it is seen by putting

$$(a, x) = \sum_i a_i x_i \in Q \quad \text{for} \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^{(n)},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q^{(n)}.$$

Let L be any finite left A-module. Then it is well known that $L \approx A^{(n)}/L_0$ with a suitable submodule L_0 of $A^{(n)}$ for some n. Therefore by Theorem 2.1 and Corollary 1.2 we obtain immediately the following theorem.

THEOREM 2.5. *Let A be a ring with minimum condition on left ideals and let L be a finitely generated left A-module. If we put*

$$(x, \varphi) = \varphi(x) \qquad \text{for } x \in L,\ \varphi \in \mathrm{Char}_Q L,$$

then this pairing is orthogonal with respect to Q, $L \approx \mathrm{Char}_Q(\mathrm{Char}_Q L)$, and the annihilator relations

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(L_0; \mathrm{Char}_Q L); L) = L_0, \qquad \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(R_0; L); \mathrm{Char}_Q L) = R_0$$

hold for every submodule L_0 of L and every submodule R_0 of $\mathrm{Char}_Q L$.

REMARK. In case A is a quasi-Frobenius ring we can take ${}_AA$ as Q in Theorem 2.5, for A is injective as a left A-module (cf. [5], p. 419).

Theorem 2.4 may be interpreted also as a commutator theorem in case A is an algebra (cf. [7], p. 560).

§ 3. Dual modules and character modules

Assume that A is an algebra of a finite rank over a ground field P with unit element. Let R be a finitely generated right A-module. The dual module of R, denoted by R^*, is the set of all P-homomorphisms of R into P and is a left A-module by the following definition:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \circ f)(x) = f(xa) \qquad \text{for } x \in R,\ a \in A.$$

For a finitely generated left A-module L, the dual module L^* is similarly defined and in this case the multiplication of L with A on right is defined as follows: $(f' \circ a)(x') = f'(ax')$, for $x' \in L$, $a \in A$, $f' \in L^*$.

If we put

$$((x, f)) = f(x) \qquad \text{for } x \in R,\ f \in R^*,$$

then in this pairing (usually called "inner product") R and R^* form an orthogonal pair with respect to P. Moreover following well known relations hold:

(a) $$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(R_0; R^*\right); R\right) = R_0, \qquad \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}\left(L_0; R\right); R^*\right) = L_0$$

(b) $$(R/R_0)^* \approx \mathrm{Ann}\left(R_0; R^*\right), \qquad (R^*/L_0)^* \approx \mathrm{Ann}\left(L_0; R\right),$$

for every submodule R_0 of R and every submodule L_0 of R^*.

The algebra A considered as a left (right) A-module will be denoted by ${}_AA\,(A_A)$ when we want to emphasize this situation.

Now we shall show that we can take $(A_A)^*$ as the injective module Q in Theorem 2.5. NAGAO-NAKAYAMA have investigated the structure of projective and injective modules in the case where A is an algebra, and by their result [6, p. 169] we can state that $(A_A)^*$ is an injective left A-module.

It follows from (b) that

$$(A_A/A_N)^* = \mathrm{Ann}\left(A_N; (A_A)^*\right).$$

Thus we have $S\left((A_A)^*\right)$ is a faithful $\bar{A}$-module, since $\mathrm{Ann}\left(A_N; (A_A)^*\right) = S\left((A_A)^*\right)$.

By using A_A as a representation space, we have the second regular representation of A in P, and then the commutator ring of the second regular representation is inverse-isomorphic to A. It follows that the inverse A-homomorphism ring of module $(A_A)^*$ is isomorphic to A, since the representations of A in P obtained respectively by modules $(A_A)^*$ and A_A as representation spaces are equivalent to each other. In fact, since the ground field P is contained in the center of A, we can put $(A_A)^* = ({}_AA)^*$, and by the definitions

of multiplication of $({}_AA)^*$ and $(A_A)^*$ with A, $(A_A)^*$ is a bimodule with A as a left and a right operator domain. We shall denote this bimodule by A^*.

In § 2 we have already seen that $\mathrm{Char}_Q({}_AA) \approx Q_B$. Thus in this case we have $\mathrm{Char}_{A^*}({}_AA) \approx A^* \approx ({}_AA)^*$.

We are now ready to prove for every left A-module L that $\mathrm{Char}_{A^*}L$ and L^* are isomorphic to each other. If an A^*-character φ of A mapps the unit element 1 of A on an element f on A^*, then let us denote φ by $\hat{f}$. For some integer n we have an A-isomorphism $L \approx ({}_AA)^{(n)}/L_0$ for suitable submodule L_0 of $({}_AA)^{(n)}$. Then the following orthogonal pairings can be defined, since $(A^*)^{(n)} \approx (A^{(n)})^*$ and $(\mathrm{Char}_{A^*}A)^{(n)} \approx \mathrm{Char}_{A^*}A^{(n)}$;

$$(X, \hat{Y}) = \sum_\nu \hat{f}_\nu(x_\nu) \in A^*$$

$$((Y, X)) = \sum_\nu f_\nu(x_\nu) \in P,$$

for $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^{(n)}$, $Y = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in (A^*)^{(n)}$, and for $\hat{Y} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_n) \in (\mathrm{Char}_{A^*}A)^{(n)}$.

Then the following statements are equivalent to one another:

1. $(X, \hat{Y}) = 0$ for all $X \in L_0$.
2. $\sum_\nu \hat{f}_\nu(x_\nu) = 0 \in A^*$ for all $X \in L_0$.
3. $\sum_\nu \left(\hat{f}_\nu(x_\nu)\right)(x) = 0 \in P$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
4. $\sum_\nu \left((x_\nu \cdot \hat{f}_\nu)(1)\right)(x) = 0$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
5. $\sum_\nu (x_\nu \circ f_\nu)(x) = 0$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
6. $\sum_\nu f_\nu(x x_\nu) = 0$ for all $X \in L_0$ and for all $x \in A$.
7. $\sum_\nu f_\nu(x'_\nu) = 0$ for all $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in L_0$.
8. $\left((Y, X')\right) = 0$ for all $X' \in L_0$.

Thus we have

$$\mathrm{Ann}(L_0; \mathrm{Char}_{A^*}A) \approx \mathrm{Ann}\left((L_0; (A)^*)\right).$$

It follows by Corollary 1.2 and relation (b) that

$$\mathrm{Char}_{A^*}L \approx L^*.$$

§ 4. Finitely generated injective modules

In this section we shall always assume that A satisfies the minimum condition on left ideals and use the notations of § 2.

THEOREM 4.1. *Let Q be an injective left A-module whose semi-simple part $S(Q)$ is a finitely generated faithful left $\bar{A}$-module. The inverse A-homomorphism*

ring B satisfies the minimum condition on right ideals if and only if Q is finitely generated.

PROOF. If we put

$$(x, b) = x \cdot b \quad \text{for } x \in {}_AQ,\ b \in B_B,$$

${}_AQ$ and B_B form an orthogonal pair with respect to Q. Thus, by Theorem 1.1 we arrive at the conclusion.

THEOREM 4.2. *Let Q be a finitely generated injective module whose semi-simple part is a faithful $\bar{A}$-module, then Q is an injective right B-module.*

PROOF. Let J be a right ideal of B. Since Q is a finite left A-module, it follows from Theorem 1.1 that in the pairing (x, b) of Theorem 4.1

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Ann}\left(\operatorname{Ann}(J; {}_AQ); B_B\right) = J,$$

$$\text{(2)} \qquad {}_AQ = \operatorname{Char}_Q(B_B),$$

where every element x of ${}_AQ$ is considered as a Q-character of B_B defined by the above pairing. Hence if we put $(\bar{x}, b) = (x, b)$ for $x \in Q$, $\bar{x} \in Q/\operatorname{Ann}(J; Q)$, $b \in J$, then $Q/\operatorname{Ann}(J; Q)$ and J form an orthogonal pair.

Thus we have

$$\operatorname{Char}_Q J \approx \operatorname{Char}_Q B/\operatorname{Ann}(J; \operatorname{Char}_Q B).$$

Hence every homomorphism of J into Q can be extended to a homomorphism of B into Q. Thus Q is injective.

THEOREM 4.3. *If A is a quasi-Frobenius ring, then B is also quasi-Frobenius.*

PROOF. Let us denote the decompositions of ${}_AA$, ${}_AQ$; B_B, Q_B into indecomposable left A- and right B-modules respectively by

$$\begin{aligned} {}_AA &= Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n; & B_B &= f_1 B \oplus \cdots \oplus f_m B, \\ {}_AQ &= Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_m; & Q_B &= Q_1' \oplus \cdots \oplus Q_n', \end{aligned}$$

where e_i, f_j, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$ are primitive idempotents of A and B respectively. Since A is quasi-Frobenius, it follows by Theorem 4.1 that B has the minimum condition on right ideals. Thus by the duality theorem of character modules, for any primitive ideal $f_\varkappa B$ of B, $\operatorname{Char}_Q f_\varkappa B$ is isomorphic to some Q_λ. Since quasi-Frobenius rings are self-injective and since ${}_AS(Q)$ is faithful $\bar{A}$-module, there exists a primitive left ideal Ae_μ which is isomorphic to Q_λ. By the same reason the $\operatorname{Char}_Q Ae_\mu$ is isomorphic to some Q_η'. Thus we have

$$f_\lambda B \approx Q_\eta'.$$

Hence every primitive right ideal $f_\lambda B$ of B is projective and injective, therefore B is a self-injective right module. Since self-injective rings with minimum condition are quasi-Frobenius[6]), B is quasi-Frobenius. This complete the proof.

[6]) This is proved in [3] and [4].

Let

$$A = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{f(\varkappa)} A\, e_{\varkappa,i},$$

be a direct decomposition of A into indecomposable left ideals, where $1 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{f(\varkappa)} e_{\varkappa,i}$, $e_{\varkappa,i}\,(\varkappa = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, f(\varkappa))$ are mutually orthogonal primitive idempotents, $A e_{\varkappa,i} \approx A e_{\varkappa}$ for $i = 1, \ldots, f(\varkappa)$, $A e_{\varkappa,i} \not\approx A e_{\lambda,j}$ for $\varkappa \neq \lambda$.

If A is a quasi-Frobenius ring, there exists a permutation π of indices $\varkappa$ such that $S(A e_{\varkappa}) \approx \bar{A} \bar{e}_{\pi(\varkappa)}$.

THEOREM 4.4. *If* $Q = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{i=1}^{t_{\varkappa}} Q_{\varkappa,i}$, $Q_{\varkappa,i} \approx A e_{\varkappa}$, *is a decomposition of* Q *into indecomposable left* A*-submodules, then the inverse* A*-homomorphism ring* B *is Frobenius if and only if* $t_{\varkappa} = t_{\pi(\varkappa)}$ *for all indices* $\varkappa$.

We omit the proof.

THEOREM 4.5. *Under the assumption of Theorem* 4.2, *the inverse* A*-homomorphism ring* B *is uniserial if and only if* A *is uniserial.*

We omit the proof.

References

[1] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with Minimum Condition. Univ. of Michigan Press 1948. — [2] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebras. Princeton: Univ. Press 1955. — [3] EILENBERG, S., and T. NAKAYAMA: On the Dimension of Modules and Algebras II. (Frobenius Algebras and quasi-Frobenius Rings.) Nagoya Math. J. **9**, 1—16 (1955). — [4] MORITA, K., Y. KAWADA and H. TACHIKAWA: On Injective Modules. Math. Z. **68**, 217—226 (1957). — [5] MORITA, K., and H. TACHIKAWA: Character Modules, Submodules of a Free Module, and quasi-Frobenius Rings. Math. Z. **65**, 414—428 (1956). — [6] NAGAO, H., and T. NAKAYAMA: On the Structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164—170 (1953). — [7] NESBITT, C. J., and R. M. THRALL: Some Ring Theorems with Applications to Modular Representation. Ann. of Math. **47**, 551—567 (1946).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 27. April 1957)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 488—497 (1958)

Über ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Lückenreihen

Von
DIETER GAIER

1. Die vorliegende Arbeit knüpft an drei wohlbekannte Sätze über Funktionen vom Exponentialtyp an[1]).

Satz A (CARLSON). *Ist* $f(z)$ *in* $\Re(z) \geqq 0$ *regulär und vom Exponentialtyp* $< \pi$, *so folgt aus* $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *stets* $f(z) \equiv 0$.

Satz B (CARTWRIGHT). *Ist* $f(z)$ *in* $|\arg z| \leqq \alpha$ $\left(0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ *regulär und vom Exponentialtyp und ferner*[2]) $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin \alpha$, *so folgt aus der Beschränktheit von* $f(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *die Beschränktheit von* $f(x)$ $(x \geqq 0)$; *ist sogar* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = s$, *so gilt* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = s$[3]).

Satz C (PÓLYA). *Ist* $f(z)$ *in* $\Re(z) \geqq 0$ *regulär und vom Exponentialtyp* $< \pi$, *so folgt aus* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leqq 0$ *stets* $h_f(0) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$[4]).

Wir fragen uns, ob sich die in diesen Sätzen auftretende Typvoraussetzung abschwächen läßt, wenn man von $f(z)$ fordert, daß $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion ist, in deren Potenzreihenentwicklung Lücken auftreten. Als Maß für die Lückenlänge verwenden wir den Pólyaschen Begriff der Maximaldichte Δ der von Null verschiedenen Koeffizienten (vgl. **3**). Betrachtet man $f(z) = \sin \pi z$, so sieht man, daß im Falle $\frac{1}{2} \leqq \Delta \leqq 1$ keine Abschwächung der Typvoraussetzung in den obigen Sätzen zu erwarten ist. Für $0 \leqq \Delta < \frac{1}{2}$ beweisen wir jedoch die Gültigkeit der Sätze A, B (für $\alpha = \pi/2$), C unter der Annahme, daß $f(z)$ in $\Re(z) \geqq 0$ vom Exponentialtyp $< \frac{\pi}{\sin \pi\Delta}$ ist (Satz 7).

In **4** geben wir limitierungstheoretische Anwendungen, wobei sich die Äquivalenz der Borelschen Verfahren B, B', B_1, B_1' in der Anwendung auf Lückenreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ $(a_n = 0$ für $n \neq \lambda_\nu)$ mit $\lambda_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ und $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty$; K fest) ergibt. Für beliebige Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ gilt diese Äquivalenz allgemein nur unter

[1]) Vgl. dazu [*1*] und dort angegebene Literatur.

[2]) Die Bezeichnungen werden in **2** erläutert.

[3]) Dieser Satz findet sich implizit bei CARTWRIGHT, explizit bei MACINTYRE [*4*, S. 16]. Die Formulierung in [*1*, S. 180] ist für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ unzutreffend.

[4]) Unsere Aussage ist äquivalent zu derjenigen ohne die Bedingung $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leqq 0$. Vgl. auch die Erweiterung von Satz C für den Fall des Winkelraums in **2**.

der stärkeren Bedingung $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty;\ K < \sqrt{\pi^2+1})$ (vgl. [3]), so daß sich also auch hier eine Größenbeschränkung durch eine Lückenforderung abschwächen läßt.

2. In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $f(z)$, die in einem abgeschlossenen Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und vom Exponentialtyp sind, und die an den Stellen $z = n = 0, 1, 2, \ldots$ gewissen Beschränkungen unterliegen.

Zunächst einige vorbereitende Betrachtungen. Ist $f(z)$ in $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ regulär $(0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi)$, so bezeichnen wir mit

$$\tau(\alpha,\beta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r;\alpha,\beta)}{r} \quad \left(M(r;\alpha,\beta) = \max_{\alpha\leq\varphi\leq\beta} |f(re^{i\varphi})|\right)$$

den Typ von $f(z)$ im Winkelraum (α,β). Dabei ist $-\infty \leq \tau(\alpha,\beta) \leq +\infty$ möglich; im Sonderfall $\tau(\alpha,\beta) < \infty$ heißt $f(z)$ vom Exponentialtyp $\tau(\alpha,\beta)$ im Winkelraum (α,β). Ist $f(z)$ eine ganze Funktion, und $\beta = \alpha + 2\pi$, so heißt $\tau(\alpha, \alpha - 2\pi) = \tau$ der Typ von $f(z)$ in der Ebene $(0 \leq \tau \leq \infty$, sofern $f(z) \not\equiv 0$ ist). Für $\beta = \alpha$ charakterisiert die Indikatorfunktion $\tau(\alpha,\alpha) = h_f(\alpha)$ das Anwachsen von $f(z)$ längs des Strahls $\arg z = \alpha$. Die Funktion $h_f(\varphi)$ hat, wenn $f(z)$ im Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und vom Exponentialtyp ist, einige wichtige Eigenschaften; zum Beispiel gilt [*1*, S. 68]

$$h_f(\varphi_2)\sin(\varphi_3-\varphi_1) \leq h_f(\varphi_1)\sin(\varphi_3-\varphi_2) + h_f(\varphi_3)\sin(\varphi_2-\varphi_1), \tag{2.1}$$

sofern $-\alpha \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \leq \alpha$ und $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, $\varphi_3 - \varphi_2 < \pi$ ist. Ist $h_f(\varphi) = -\infty$ für ein φ mit $|\varphi| < \alpha$, so für alle $|\varphi| < \alpha$; andernfalls ist $h_f(\varphi)$ stetig in $|\varphi| < \alpha$. Aus (2.1) leitet man sofort ab

Hilfssatz 1. *Ist $f(z)$ in $|\arg z| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ regulär und vom Exponentialtyp, und $h_f(0) \geq 0$, so ist entweder $h_f(\varphi) \geq 0$ für alle φ in $-\alpha \leq \varphi \leq 0$, oder $h_f(\varphi) \geq 0$ für alle φ in $0 \leq \varphi \leq \alpha$, oder es gilt beides.*

Die Annahme $h_f(\varphi_1) < 0$ $(-\alpha \leq \varphi_1 < 0)$ und $h_f(\varphi_3) < 0$ $(0 < \varphi_3 \leq \alpha)$ widerspricht nämlich (2.1), wenn $\varphi_2 = 0$ genommen wird.

Weiter stellt man unschwer fest, daß

$$h_{f\cdot g}(\varphi) \leq h_f(\varphi) + h_g(\varphi) \quad (|\varphi| \leq \alpha), \tag{2.2}$$

$$h_{f+g}(\varphi) \leq \max\{h_f(\varphi), h_g(\varphi)\} \quad (|\varphi| \leq \alpha) \tag{2.3}$$

gilt, wenn $f(z)$ und $g(z)$ zwei in $|\varphi| \leq \alpha$ reguläre Funktionen vom Exponentialtyp sind.

Wir beweisen nun zunächst mit Hilfe von Satz B eine Erweiterung von Satz C für den Fall, daß $f(z)$ in einem Winkelraum der Öffnung $< \pi$ regulär und vom Exponentialtyp ist.

Satz C'. *Ist $f(z)$ in $|\arg z| \leq \alpha$ $\left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp und ferner*

$$h_f(\pm\alpha) < \pi\sin\alpha + h_f(0)\cos\alpha, \tag{2.4}$$

so gilt

$$h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}. \tag{2.5}$$

Der Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist mit Satz C äquivalent. Für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ kann der zweite Term rechts in (2.4) nicht fortgelassen werden, wie z. B. $f(z) = e^{-az}\sin \pi z$ $(a>0)$ zeigt; (2.4) wäre erfüllt für jedes positive $\alpha < \frac{\pi}{2}$, jedoch (2.5) nicht. Die Formulierung in [*1*, S. 178] ist daher unrichtig für $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Wir beweisen Satz C′ mit Satz B. Statt (2.4) können wir schreiben

$$h_f(\pm\alpha) < b\sin\alpha + h_f(0)\cos\alpha \quad (b<\pi). \tag{2.4'}$$

Nehmen wir an, es sei $h_f(0) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log|f(x)|}{x} > \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$. Dann wählen wir ein γ mit $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} < \gamma < h_f(0)$ und betrachten $F(z) = e^{-\gamma z} f(z)$. Es gilt dann

$$h_F(\pm\alpha) = h_f(\pm\alpha) - \gamma\cos\alpha < b\sin\alpha + \big(h_f(0) - \gamma\big)\cos\alpha$$
$$h_F(\pm\alpha) < c\sin\alpha \quad (c<\pi),$$

sofern $h_f(0) - \gamma$ hinreichend klein gewählt war. Weiter ist $F(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ beschränkt und also nach Satz B auch $F(x)$ $(x \geqq 0)$ beschränkt. Dies bedeutet aber $h_f(0) \leqq \gamma$, gegen die Wahl von γ.

Wir stellen noch zwei einfache Folgerungen fest.

Zusatz. *Es sei* $f(z)$ *in* $|\arg z| \leqq \alpha \left(0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ *regulär und vom Exponentialtyp und ferner* $h_f(\pm\alpha) < \pi\sin\alpha$.

a) *Dann gilt* $h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$, *sofern* $h_f(0) \geqq 0$ *ist.*

b) *Ist* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leqq 0$, *so auch* $h_f(0) \leqq 0$.

Dabei braucht in b) nicht $h_f(0) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n}$ zu gelten; vgl. $f(z) = e^{-az}\sin\pi z$ $(a>0)$.

Nun kommen wir zur eigentlichen Fragestellung dieses Paragraphen.

Satz 1. *Die Funktion* $f(z)$ *sei im Winkelraum* $|\arg z| \leqq \alpha \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ *regulär und vom Exponentialtyp, und es sei* $h_f(\pm\alpha) \leqq a\sin\alpha = A\,(-\infty \leqq A < +\infty)$. *Dann folgt aus* $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *stets*

$$h_f(0) \leqq (a-\pi)\operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{\cos\alpha} - \pi\operatorname{tg}\alpha. \tag{2.6}$$

Wir bemerken, daß für $f(z) = \exp\{[(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha]z\}\cdot\sin\pi z$ in (2.6) das Gleichheitszeichen angenommen wird.

Beweis. Ist $h_f(0) = -\infty$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also $-\infty < h_f(0) < +\infty$. Wir betrachten dann die Funktion $g(z) = f(z)/\sin\pi z$ im Winkelraum

$|\arg z| \leqq \alpha$. Sie ist dort regulär und ebenfalls vom Exponentialtyp. Dies ergibt sich sofort daraus, daß $g(z)$ auf dem Rand des Kreisringsektors $n-\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq n+\frac{1}{2}$, $|\arg z| \leqq \alpha$ eine Abschätzung $|g(z)| \leqq C e^{c n}$ für Konstanten c, C erlaubt, die folglich auch in dessen Innerem gilt, so daß wir für $|\arg z| \leqq \alpha$ sicher $|g(z)| \leqq C e^{c(z+\frac{1}{2})}$ haben. Nun ist $-\infty < h_g(0) < +\infty$, denn aus $h_g(0) = -\infty$ folgte wegen $h_f(0) \leqq h_g(0)$ ja $h_f(0) = -\infty$. Wir können also $F(z) = e^{-h_g(0) z} \cdot g(z)$ bilden, was in $|\arg z| \leqq \alpha$ regulär und vom Exponentialtyp ist. Wegen $h_F(0) = 0$ folgt mit Hilfssatz 1 etwa $h_F(\varphi) \geqq 0$ $(0 \leqq \varphi \leqq \alpha)$, also für $\varphi = \alpha$

$$0 \leqq h_F(\alpha) = -h_g(0)\cos\alpha + h_g(\alpha) = -h_g(0)\cos\alpha + h_f(\alpha) - \pi \sin\alpha,$$

woraus sich mit $h_g(0) \geqq h_f(0)$ sofort (2.6) ergibt.

Der folgende Satz 2 liefert eine Abschätzung von $h_f(0)$ unter einer schwächeren Annahme als $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Satz 2. *Für die Funktion $f(z)$ aus Satz 1 folgt aus* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|f(n)|}{n} \leqq 0$ *stets*

$$h_f(0) \leqq \max\{0, (a-\pi)\operatorname{tg}\alpha\}. \tag{2.7}$$

Bemerkungen. 1) In (2.7) kann das Gleichheitszeichen angenommen werden. Für $f(z) = \sin az$ $(0 < a < \pi)$ wird die erste, für

$$f(z) = \exp\{[(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha]z\} \cdot \sin\pi z \qquad (a > \pi)$$

die zweite Schranke erreicht.

2) Satz 2 ist, sofern $a \geqq \pi$ ist, eine Verbesserung von Satz 1. Jedoch läßt sich $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log f(n)}{n} \leqq 0$ nicht noch weiter abschwächen, da z. B. $f(z) = e^{\varepsilon z}$ für $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\pi}$ erfüllt: $h_f(\pm\alpha) = \pi\sin\alpha$, $h_f(0) = \varepsilon > 0$.

Beweis von Satz 2. Ist $h_f(0) \leqq 0$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also $0 < h_f(0) < \infty$. Der Fall $a < \pi$ tritt nicht ein, da der Zusatz zu Satz C′ sofort $h_f(0) \leqq 0$ ergeben würde. Also bleibt der Fall $a \geqq \pi$ zu behandeln. Hierzu wählen wir ein $\gamma > 0$ und betrachten die Hilfsfunktion

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f(n) e^{-\gamma n}}{\pi(z-n)} e^{\gamma z} \sin\pi z.$$

Von $g(z)$ stellen wir leicht fest:

$g(z)$ ist eine ganze Funktion vom Exponentialtyp;

$g(n) = f(n)$ $\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

$h_g(\varphi) \leqq \gamma\cos\varphi + \pi|\sin\varphi|$ und also $h_g(\pm\alpha) \leqq \gamma\cos\alpha + \pi\sin\alpha$.

Für die Funktion $F(z) = f(z) - g(z)$ $(|\arg z| \leqq \alpha)$ haben wir somit $F(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sowie

$$h_F(\pm\alpha) \leqq \max\{h_f(\pm\alpha), h_g(\pm\alpha)\} \leqq \max\{a\sin\alpha, \gamma\cos\alpha + \pi\sin\alpha\}. \tag{2.8}$$

(a) $a=\pi$. Aus (2.8) folgt dann mit Satz 1 sofort $h_F(0)\leqq\gamma+\pi\operatorname{tg}\alpha-\pi\operatorname{tg}\alpha=\gamma$, also $h_f(0)\leqq\max\{h_F(0),h_g(0)\}\leqq\gamma$ für jedes $\gamma>0$, im Widerspruch zu $h_f(0)>0$. Dieser Fall tritt also auch nicht ein.

(b) $a>\pi$. Da γ beliebig klein wählbar ist, ist nun die erste Schranke in (2.8) maßgebend, und Satz 1 liefert $h_F(0)\leqq(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha$. Somit ist

$$h_f(0)\leqq\max\{h_F(0),h_g(0)\}\leqq\max\{(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha,\gamma\}=(a-\pi)\operatorname{tg}\alpha,$$

sobald γ hinreichend klein gewählt ist, womit Satz 2 bewiesen ist.

Ist von $f(z)$ der Typ in $\Re(z)\geqq 0$ bekannt, so enthält Satz 2 eine Beurteilung von $h_f(0)$ durch den Typ.

Satz 3. *Die Funktion $f(z)$ sei in $\Re(z)\geqq 0$ regulär und vom Exponentialtyp $\leqq k$. Dann folgt aus* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}\leqq 0$ *stets*

$$h_f(0)\leqq 0 \text{ falls } k<\pi, \qquad h_f(0)\leqq\sqrt{k^2-\pi^2} \text{ falls } k\geqq\pi. \tag{2.9}$$

Beweis. Für $k<\pi$ ist (2.9) in Satz C enthalten. Es sei also $k\geqq\pi$ und $h_f(0)\leqq\sqrt{k^2-\pi^2}$ zu beweisen. Ist $h_f(0)\leqq 0$, so ist nichts zu zeigen. Im Falle $h_f(0)>0$ wenden wir Satz 2 an für $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{h_f(0)}$ und erhalten

$$h_f(0)\leqq\max\left\{0,\frac{k}{\cos\alpha}-\pi\operatorname{tg}\alpha\right\}=\left(\frac{k}{\sin\alpha}-\pi\right)\frac{\pi}{h_f(0)}.$$

Die Auflösung dieser Ungleichung nach $h_f(0)$ ergibt (2.9).

Mit unseren jetzigen Ergebnissen untersuchen wir nun, wie sich die Bedingung $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}\leqq 0$ auf das seitliche Verhalten von $f(z)$ auswirkt.

Satz 4. *Die Funktion $f(z)$ sei im Winkelraum $|\arg z|\leqq\alpha\left(0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ regulär und vom Exponentialtyp $\leqq k$ $(k>0)$. Dann folgt aus* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|f(n)|}{n}\leqq 0$ *stets*

$$h_f(\varphi)<k \quad \text{für} \quad |\varphi|<\min\left\{\alpha,\arcsin\frac{\pi}{k}\right\}, \tag{2.10}$$

also für alle diejenigen φ aus $|\varphi|<\alpha$, für die $|\sin\varphi|<\frac{\pi}{k}$ ist. Für jedes abgeschlossene Teilintervall $|\varphi|\leqq d<\min\left\{\alpha,\arcsin\frac{\pi}{k}\right\}$ gilt sogar $h_f(\varphi)\leqq k(d)<k$.

Wir bemerken gleich, daß die Bedingung $|\sin\varphi|<\frac{\pi}{k}$ genau ist. Denn für $f(z)=e^{az}\sin\pi z\,(a>0)$ kann man in $\Re(z)\geqq 0$ $k=\sqrt{a^2+\pi^2}$ wählen, und es ist $h_f(\varphi)=k$ für $|\operatorname{tg}\varphi|=\frac{\pi}{a}$, d.h. für $|\sin\varphi|=\frac{\pi}{k}$.

Beweis. Es genügt offensichtlich, Satz 4 für $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ zu beweisen.

(a) $h_f(0)\leqq 0$. Dann folgt aus (2.1) sofort $h_f(\varphi)\leqq k\frac{|\sin\varphi|}{\sin\alpha}$ für $|\varphi|\leqq\alpha$, also gilt (2.10).

(b) $h_f(0) = a > 0$. Setzen wir dann $m(\varphi) = \max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\}$ für $0 < \varphi \leq \alpha$, so folgt aus Satz 2 [wegen $h_f(0) > 0$] $a \leq \frac{m(\varphi)}{\cos\varphi} - \pi \operatorname{tg} \varphi$, also

$$k \geq m(\varphi) \geq a\cos\varphi + \pi\sin\varphi = G(\varphi) \quad (0 < \varphi \leq \alpha). \tag{2.11}$$

Von $G(\varphi)$ bemerken wir, daß es sein Maximum im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ an der Stelle φ_0 mit $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\pi}{a}$ annimmt, mit $G(\varphi_0) = \sqrt{a^2 + \pi^2}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

(b_1) $\varphi_0 > \alpha$. Unter dieser Bedingung für a ergibt (2.1)

$$h_f(\varphi)\sin\alpha \leq a\sin(\alpha - \varphi) + k\sin\varphi = H(\varphi) \qquad (0 \leq \varphi \leq \alpha).$$

Diese Funktion $H(\varphi)$ hat kein Extremum in $(0, \alpha)$. Sonst wäre nämlich $-a\cos(\alpha - \varphi) + k\cos\varphi = 0$, das heißt $k\cos\varphi = a\cos\alpha\cos\varphi + a\sin\alpha\sin\varphi$ oder $a\cos\alpha - k = -a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi$ für ein φ mit $0 < \varphi < \alpha$. Mit (2.11) für $\varphi = \alpha$ folgt daraus $-a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi \leq -\pi\sin\alpha$, also $\operatorname{tg}\varphi \geq \frac{\pi}{a}$ für unser angenommenes Extremum von $H(\varphi)$, im Widerspruch zu $\operatorname{tg}\varphi < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\pi}{a}$. Also gilt

$$h_f(\varphi)\sin\alpha \leq \max\{H(0), H(\alpha)\} = \max\{a\sin\alpha, k\sin\alpha\} = k\sin\alpha \quad (0 \leq \varphi \leq \alpha)$$

und sogar $h_f(\varphi) < k$ $(0 < \varphi < \alpha)$. Da aus (2.11) für kleine φ folgt $k \geq a + \pi\varphi + O(\varphi^2)$, ist notwendig $k > a = h_f(0)$, also gilt $h_f(\varphi) < k$ $(0 \leq \varphi < \alpha)$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall. Entsprechend schließt man für $-\alpha < \varphi \leq 0$.

(b_2) $\varphi_0 \leq \alpha$. Dann ist auch φ_1 mit $\sin\varphi_1 = \frac{\pi}{k}$ in $\varphi_1 \leq \alpha$. Denn aus (2.11) folgt für $\varphi = \varphi_0$ zunächst $k \geq \sqrt{a^2 + \pi^2} > \pi$; das heißt aber $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \pi^2}} \leq \frac{\pi}{a} = \operatorname{tg}\varphi_0$, also $\varphi_1 \leq \varphi_0 \leq \alpha$.

Für $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ erhalten wir nun aus (2.1) mit $\sin\varphi_1 = \frac{\pi}{k}$

$$h_f(\varphi)\sin\varphi_1 \leq a\sin(\varphi_1 - \varphi) + k\sin\varphi \leq \sqrt{k^2 - \pi^2}\sin(\varphi_1 - \varphi) + k\sin\varphi,$$

also

$$h_f(\varphi) \leq \sqrt{k^2 - \pi^2}\cos\varphi + \pi\sin\varphi \qquad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1).$$

Dies ergibt sofort $h_f(\varphi) < k$ für $0 \leq \varphi < \varphi_1$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall. Für $-\varphi_1 < \varphi < 0$ schließt man entsprechend.

3. In diesem Abschnitt geben wir einige Anwendungen von Satz 4 auf ganze Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{3.1}$$

bei denen viele $a_n = 0$ sind, oder bei denen die a_n reell sind, und wenige Vorzeichenwechsel stattfinden.

Wir benötigen zunächst einige Begriffe (vgl. [7, S. 556ff.]). Ist $\{\lambda_n\}$ eine beliebige, streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, und $N(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$ $(x>0)$ gesetzt, so bezeichnet man mit

$$\lim_{\xi \to 1-0} \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x) - N(\xi x)}{x - \xi x} = d \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\xi \to 1-0} \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x) - N(\xi x)}{x - \xi x} = D$$

die Minimaldichte bzw. die Maximaldichte der Folge $\{\lambda_n\}$. Der besonders wichtige Spezialfall verschwindender Maximaldichte kann auch durch $\lambda_n/n \to \infty$ $(n \to \infty)$ charakterisiert werden.

Wir sagen nun, die Maximaldichte der Koeffizienten von (3.1) sei Δ, wenn die Indexfolge der nichtverschwindenden Koeffizienten von (3.1) die Maximaldichte Δ hat; wir sagen weiter, die Maximaldichte der Vorzeichenwechsel in (3.1) sei Δ, wenn erstens alle a_n reell sind, und wenn zweitens die Maximaldichte derjenigen Indexfolge $\{\lambda_n\}$ Δ ist, für die bei a_{λ_n} ein Vorzeichenwechsel eintritt, das heißt für ein solches a_{λ_n} ist $a_{\lambda_n} \neq 0$ und $a_{\lambda_n} \cdot a_k < 0$ für das letzte $a_k \neq 0$ vor a_{λ_n}.

Für ganze Funktionen mit Lückenreihen (bzw. mit wenigen Vorzeichenwechseln) hat PÓLYA unter anderem bewiesen:

Satz D ([7, S. 622]). *Die Maximaldichte der Koeffizienten der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\leq \Delta$. *Dann ist* $\tau(\alpha, \beta) = \tau$, *sobald* $\beta - \alpha > 2\pi\Delta$ *ist.*

Satz E ([7, S. 624]). *Die Maximaldichte der Vorzeichenwechsel der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\leq \Delta$. *Dann ist* $\tau(-\alpha, +\alpha) = \tau$, *sobald* $\alpha > \pi\Delta$ *ist.*

Diese beiden Ergebnisse kombinieren wir mit Satz 4 und erhalten

Satz 5. *Die Maximaldichte der Koeffizienten [bzw. der Vorzeichenwechsel] der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\leq \Delta < \frac{1}{2}$, *und* $f(z)$ *sei in* $\Re(z) \geq 0$ *vom (genauen) Exponentialtyp* $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ *mit* $0 < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{\sin \pi\Delta}$. *Dann gilt notwendig* $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} > 0$.

Wir heben folgenden Sonderfall hervor:

Satz 6. *Die Funktion* $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu}$ *mit* $n_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ *sei ganz, und für ein* $\delta > 0$ *sei* $0 < \tau(-\delta, +\delta) < +\infty$. *Dann gilt notwendig* $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} > 0$.

Beweis von Satz 5. Annahme, es sei $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} \leq 0$. Dann stellen wir fest:

(a) Nach PÓLYA ist $\tau(-\alpha, +\alpha) = \tau(-\pi, +\pi) = \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, sobald $\alpha > \pi\Delta$ ist, und dabei ist $\pi\Delta < \frac{\pi}{2}$.

(b) Andererseits können wir sagen:

(b_1) Für $0 < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \pi$ ist nach Satz C $h_f(0) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} \leq 0$, also $h_f(\varphi) \leq \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot |\sin \varphi|$ für $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ und daher $\tau(-\alpha, +\alpha) < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, sobald $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, im Widerspruch zu (a).

(b_2) Ist $\pi \leqq \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{\sin \pi \Delta}$, dann folgt aus Satz 4, für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ angewandt, $h_f(\varphi) < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, wenn $|\sin \varphi| < \pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) (\leq 1)$ ist, gleichmäßig für jedes abgeschlossene Teilintervall, also

$$\tau(-\alpha, +\alpha) < \tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{wenn} \quad \sin \alpha < \pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

ist. Dies ist im Widerspruch zu (a), wenn $\arcsin\left(\pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)\right) > \pi \Delta$ ist, also für $\sin \pi \Delta < \pi/\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Unsere Annahme führt also in jedem Fall zum Widerspruch.

In Satz 5 sind folgende Verallgemeinerungen der Sätze von Carlson, Cartwright und Pólya enthalten für den Fall $\Delta < \frac{1}{2}$. Für $\Delta = \frac{1}{2}$ kann in jenen Sätzen die Typvoraussetzung $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \pi$ nicht abgeschwächt werden, wie ja schon $\sin \pi z$ zeigt, wo gleichzeitig $\Delta = \frac{1}{2}$ und $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ auftritt.

Satz 7. *Die Maximaldichte der Koeffizienten [bzw. der Vorzeichenwechsel] der ganzen Funktion* (3.1) *sei* $\leq \Delta < \frac{1}{2}$, *und* $f(z)$ *sei in* $\Re(z) \geqq 0$ *vom Exponentialtyp* $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{\sin \pi \Delta}$.

a) *Ist* $f(n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *so gilt* $f(z) \equiv 0$.

b) *Ist* $f(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *beschränkt, so ist* $f(x)$ $(x \geqq 0)$ *beschränkt; gilt* $f(n) \to s$ $(n \to \infty)$, *so gilt* $f(x) \to s$ $(x \to \infty)$.

c) *Ist* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} \leqq 0$, *so ist* $h_f(0) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n}$.

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) > 0$ wegen Satz 5 ausgeschlossen ist, und für $\tau\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \leqq 0$ sind a), b), und c) schon bekannt.

4. Hier sollen noch einige limitierungstheoretische Folgerungen gezogen werden. Obwohl in Satz 7 nur für den Fall $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} \leqq 0$ Aussagen gemacht werden, können unsere Sätze in **2** unter Umständen auch dann verwendet werden, wenn $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{\log |f(n)|}{n} > 0$ ist. Wir wollen dies am Fall $\Delta = 0$ illustrieren.

Satz 8. *Die Maximaldichte der Koeffizienten [bzw. der Vorzeichenwechsel] der ganzen Funktion* (3.1) *sei* 0, *und für ein* $\delta > 0$ *sei* $\tau(-\delta, +\delta) < +\infty$. *Dann folgt aus* $f(n) \cong e^{an}$ $(n \to \infty)$ *stets* $f(x) \cong e^{ax}$ $(x \to \infty)$ $(a \geqq 0)$[5].

Beweis. Die Funktion $F(z) = e^{-az} f(z)$ ist in $|\arg z| \leq \delta$ vom Exponentialtyp, und es gilt $F(n) \to 1$ $(n \to \infty)$. Ferner ist $h_F(\varphi) = -a \cos \varphi + h_f(\varphi)$

[5]) Vgl. dazu [3, S. 874]. Dort wird $f(x) \cong e^{ax}$ $(x \to \infty)$ aus $f(n) \cong e^{an}$ $(n \to \infty)$ unter einer Typvoraussetzung gefolgert.

$(|\varphi| \leqq \delta)$, also

$$\max\{h_F(\varphi), h_F(-\varphi)\} = -a\cos\varphi + \max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\} = A(\varphi)\sin\varphi \qquad (0 < \varphi \leqq \delta).$$

(a) Es gibt ein φ, so daß $A(\varphi) < \pi$ ist. Dann besagt Satz B sofort $f(x) \cong e^{a\,x}$ $(x \to \infty)$.

(b) Es gibt kein φ, so daß $A(\varphi) < \pi$ ist. Satz 2 liefert dann $h_F(0) \leqq (A(\varphi) - \pi)\operatorname{tg}\varphi$ für alle φ in $0 < \varphi < \delta$, also

$$h_f(0) = h_F(0) + a \leqq (A(\varphi) - \pi)\operatorname{tg}\varphi + a = [\max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\} - \pi\sin\varphi]\cos^{-1}\varphi \qquad (0 < \varphi < \delta),$$

$$h_f(0) \leqq \max\{h_f(\varphi), h_f(-\varphi)\} - \pi\varphi + O(\varphi^2).$$

In jeder hinreichend kleinen Umgebung von $\varphi = 0$ gibt es also einen Wert φ mit $h_f(\varphi) > h_f(0)$, und dies ist wegen der Stetigkeit von $h_f(\varphi)$ in $(-\delta, +\delta)$ [$h_f(0)$ endlich!] im Widerspruch zu den Sätzen D und E für $A = 0$.

Satz 8 läßt sich dazu verwenden, die Äquivalenz verschiedener Borel-Verfahren in der Anwendung auf Lückenreihen zu beweisen, wofür seither an Stelle der Lückenforderung eine Größenbeschränkung getreten war ([3, S. 875]).

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit den Teilsummen s_n heißt bekanntlich B-summierbar [bzw. B'-summierbar] zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n x^n}{n!} = s \left[\text{bzw. } \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}a(t)\,dt = s,\ a(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}\right]$$

gilt. Durchläuft x nur die Werte $n = 1, 2, 3, \ldots$, so entstehen die stärkeren Verfahren B_I und B_I' (unstetige Borelsche Verfahren).

Satz 9. *Gegeben sei die Lückenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(a_n = 0$ *für* $n \neq \lambda_\nu)$ *mit* $\lambda_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ *und* $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty;\ K$ *fest). Dann sind die Verfahren* B, B', B_I, B_I' *in der Anwendung auf* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *alle äquivalent.*

Zusatz. *Ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(a_n = 0$ *für* $n \neq \lambda_\nu)$ *mit* $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqq \vartheta\sqrt{\lambda_\nu}$ $(\vartheta > 0)$ *und* $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty;\ K$ *fest) durch eines der Verfahren* B, B', B_I, B_I' *summierbar, so ist sie sogar konvergent.*

Dieser Zusatz ergibt sich sofort mit Satz 9 aus dem Lückenumkehrsatz für das B-Verfahren ([5, S. 351] und [6, S. 205]).

Beweis von Satz 9. Wegen der bereits bekannten Äquivalenz von B und B' ([2]) haben wir die Schlüsse $B_I \to B$ und $B_I' \to B'$ durchzuführen. Wir können annehmen, die a_{λ_ν} seien alle reell, und bemerken noch, daß wegen

$\lambda_\nu/\nu \to \infty$ $(\nu \to \infty)$ die Maximaldichte der Vorzeichenwechsel für die Folge $\{s_n\}$ Null ist, weil Vorzeichenwechsel höchstens für $n = \lambda_\nu$ eintreten.

(a) $B_I \to B$. Es ist also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{n!} \cong s e^z$ $(z = 1, 2, \ldots)$, und infolge von $a_n = O(K^n)$ ist $f(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp. Also liefert Satz 8 $f(x) \cong s e^x$ $(x \to \infty)$, das heißt $B - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

(b) $B_I' \to B'$. Hier betrachten wir

$$f(z) = \int_0^z e^{-t} a(t)\, dt = -e^{-z} a(z) + e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n z^n}{n!} = e^{-z} F(z).$$

Die Funktion $F(z)$ ist wieder ganz und vom Exponentialtyp, und ihre Koeffizienten haben die Maximaldichte 0 der Vorzeichenwechsel. Also liefert Satz 8 aus $F(z) \cong s e^z$ $(z = 1, 2, \ldots)$ wieder $F(x) \cong s e^x$ $(x \to \infty)$, das heißt $B' - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Literatur

[1] Boas, R. P.: Entire Functions. New York 1954. — [2] Gaier, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453—455 (1953). — [3] Gaier, D.: On modified Borel methods. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 873—879 (1955). — [4] Macintyre, A. J.: Laplace's transformation and integral functions. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 1—20 (1938/39). — [5] Meyer-König, W.: Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt. Math. Z. **57**, 351—352 (1952). — [6] Meyer-König, W., u. K. Zeller: Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z. **66**, 203—224 (1956). — [7] Pólya, G.: Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Z. **29**, 549—640 (1929).

Stuttgart, Technische Hochschule, Mathematisches Institut A

(Eingegangen am 19. September 1957)

COLLINGWOOD, E. F.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 498/499 (1958)

Addendum: On sets of maximum indetermination of analytic functions

By

E. F. COLLINGWOOD

In my paper published in Math. Zeitschr. vol. **67**, pp. 377—396 (1957) there is an error, kindly pointed out to me by Dr. J.D. WESTON, in the proof of Theorem 7, where the assertion that the inequality (10) holds uniformly in the set $H(\vartheta, -\eta_L)$ is invalid. To obtain a valid proof I replace the passage which begins with the sentence containing (10) by the following argument:

$E_{N,M,L}$ is therefore dense in an arc of the circumference $\varkappa$ which we may clearly suppose to be an open arc $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ of angular measure less than η_L. We can find $e^{i\vartheta} \in E_{N,M,L} \cap \left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}, \vartheta_2\right)$ so that $\left(\vartheta_1, \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right) < (\vartheta_1, \vartheta) < (\vartheta - \eta_L, \vartheta)$; and since $H(\vartheta)$ is dense in $(\vartheta - \eta_L, \vartheta)$ we can find $e^{i\vartheta'} \in H(\vartheta) \cap \left(\vartheta_1, \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)$. By the definition of $E_{N,M,L}$ we have $a \in \mathscr{C}\left(\overline{C}(f, H(\vartheta, -\eta_L))_{+\varepsilon_N/2}\right)$ and hence $a \in \mathscr{C}\left(C(f, e^{i\vartheta'})_{+\varepsilon_N/2}\right)$. The point $e^{i\vartheta'}$ is therefore the centre of a circle $\delta(\vartheta')$ such that the inequality

$$[f(z), a] > 3\,\varepsilon_N/8 \tag{10}$$

is satisfied for all $z \in \delta(\vartheta')$, $|z| < 1$. For if not we can find a sequence $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{i\vartheta'}$ such that $[f(z_n), a] \leqq \varepsilon_N/3$ which implies that

$$a \in C(f, e^{i\vartheta'})_{+3\varepsilon_N/8} < C(f, e^{i\vartheta'})_{+\varepsilon_N/2}.$$

If now γ is an arc of $\varkappa$ interior to $\delta(\vartheta')$ it follows from (10) that for all $e^{i\vartheta''} \in \gamma$ we must have

$$a \in \mathscr{C}\left(C(f, e^{i\vartheta''})_{+\varepsilon_N/3}\right)$$

and hence $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta''})$ is empty since T_M is of diameter less than $\varepsilon_N/4$. But since $E_{N,M,L}$ is dense in γ and is a subset of $E_{N,M}$ we can choose $e^{i\vartheta''} \in E_{N,M} \cap \gamma$. But with this choice of ϑ'', by the definition of $E_{N,M}$ above,

$$T_M \cap C(f, e^{i\vartheta''}) \cap \mathscr{C}\left(C_{H_T}(f, e^{i\vartheta''})_{+\varepsilon_N}\right)$$

is not empty and therefore the larger set $T_M \cap C(f, e^{i\vartheta''})$ is not empty. We have thus reached a contradiction which proves the theorem.

It will be noted that the reconstructed proof is independent even of continuity. It follows that *Theorem 7 and Corollary 3 are valid for an arbitrary*

function defined in the interior of the unit disc $|z|<1$. This places them on the same footing as a recent theorem of BAGEMIHL [Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41**, 379—382 (1955), Theorem 2] on the intersection of pairs of internal curviliear cluster sets of an arbitrary function $f(z)$. An argument of GROSS [Math. Zeitschr. **2**, 249—250 (1918)] at once shows BAGEMIHL's result to be applicable also to the intersection of the right and left-hand boundary cluster sets $C_{Br}(f, e^{i\vartheta}) \cap C_{Bl}(f, e^{i\vartheta})$ *which is therefore not empty except perhaps at an enumerable set of points* $e^{i\vartheta} \in \varkappa$, *while the generalised Corollary 3 shows that this intersection is actually maximal except perhaps in a set of the first category on* $\varkappa$.

Lilburn Tower, Alnwick, Northumberland (England)

(Eingegangen am 4. November 1957)

Integraltafeln zur Quantenchemie

Von Dr. **H. Preuss**, Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.

Soeben erschien:

Zweiter Band: VII, 143 Seiten 4°. 1957. Ganzleinen DM 36.—

Das vorliegende Buch, als zweiter Band einer aus vier Bänden bestehenden Tabellenserie, enthält die wichtigen *heteronuklearen Einelektron-Integrale*, wie sie bei fast allen numerischen Behandlungen von Molekülen nach der Quantenmechanik auftreten.

Die Integraltafeln kommen einem von Quantenchemikern immer häufiger geäußerten Wunsche entgegen, die bei den Untersuchungen sehr zahlreich auftretenden Wechselwirkungsintegrale schon numerisch vorliegen zu haben, damit die Rechnungen nicht mehr durch Integrationsprobleme, die oft sehr kompliziert und umfangreich sein können, belastet werden.

Es handelt sich bei diesen hier vorliegenden Einelektron-Integralen um solche, die bei Verwendung von sogenannten Slaterfunktionen auftreten, wenn diese verschiedene effektive Abschirmzahlen besitzen und der K- und L-Schale angehören.

Die Integrale sind, neben einigen erforderlichen Hilfsfunktionen, in zweidimensionalen Tafeln (allgemein sechsstellig mit Zehnerpotenzangabe) tabelliert, wobei die Bereiche für die zu erwartenden Anwendungen ausreichen sollten.

Neben einer Einleitung, die unter anderem den Gebrauch der Tafeln erläutert, ist darüber hinaus, wie schon im ersten Band, wieder eine Übersicht über die bisher andernorts schon publizierten Tabellen und Formelsammlungen aufgenommen worden, die zugleich einen Vergleich in tabellierten Bereichen und Bezeichnungsweisen untereinander und mit den hier vorliegenden gestattet.

Es darf behauptet werden, daß diese Integrale erstmalig in dieser Allgemeinheit berechnet worden sind.

Im März 1956 erschien:

Erster Band: Mit einem Geleitwort von Professor Dr. K. Wirtz, Göttingen. VI, 162 Seiten 4°. 1956. Ganzleinen DM 39.—

Aus den Besprechungen: . . . Der Autor des vorliegenden Werkes hat sich der dankenswerten Mühe unterzogen, ein Rechenprogramm zu entwickeln, in dem die bei dem Approximationsverfahren immer wieder auftretenden Normalintegrale tabelliert wurden. Die Durchführung dieses Programmes verdankt die Fachwelt den günstigen Voraussetzungen, welche hierfür in dem von Professor Heisenberg geleiteten Max-Planck-Institut für Physik bestehen. Sind doch in diesem die hierfür unbedingt nötigen elektronischen Rechenmaschinen G 1 und G 2 gebaut worden, welche zur Durchführung dieser Arbeit die unerläßliche Voraussetzung waren. Die Verwendung der vorliegenden Tabellen wird zweifellos die künftige Entwicklung der Molekülphysik und der mit ihr zusammenhängenden Gebiete günstig beeinflussen, so daß die Herausgabe des Werkes schon aus fachlichen Erwägungen wärmstens zu begrüßen ist. Daß die Anlage und Übersicht durch den Verlag in ausgezeichneter Weise durchgeführt wurde, braucht nicht besonders betont zu werden. „*Acta Physica Austriaca*"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Verständliche Wissenschaft

Naturwissenschaftliche Abteilung, herausgegeben von Professor Dr. **Karl von Frisch**, München.

Sichtbares und unsichtbares Licht

Von Dr. **Eduard Rüchardt**, Professor für Physik an der Universität München. (35. Band.) Zweite, verbesserte Auflage. 6. — 11. Tausend. Mit 137 Abbildungen. VIII, 168 Seiten.

Luftelektrizität und Radioaktivität

Von **Hans Israël**, Professor an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Leiter des Meteorologischen Observatoriums Aachen des Deutschen Wetterdienstes (62. Band). 1.—6. Tausend. Mit 86 Abbildungen. VIII, 125 Seiten.

Die Erde als Planet

Von Dr. phil. **Karl Stumpff**, a. o. Professor i. R., Lehrbeauftragter für Astronomie an der Universität Göttingen (42. Band). Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. 6.—11. Tausend. Mit 57 Abbildungen. VI, 176 Seiten.

Die Sonne

Von Dr. **Karl Otto Kiepenheuer**, Professor an der Universität Freiburg i. Br. und Leiter des Fraunhofer-Institutes (68. Band). 1.—6. Tausend. Mit 76 Abbildungen. VIII, 150 Seiten.

Die Wissenschaft von den Sternen

Ein Überblick über Forschungsmethoden und -ergebnisse der Fixsternastronomie. Von Professor Dr. **W. Kruse**, weiland Observator der Sternwarte Hamburg-Bergedorf (43. Band). Zweite, verbesserte Auflage. 6.—11. Tausend. Bearbeitet von Dr. **W. Dieckvoss**, Assistent an der Sternwarte Hamburg-Bergedorf. Mit 106 Abbildungen. XII, 179 Seiten.

Die Kometen

Von Professor Dr. **Karl Wurm**, Hamburg-Bergedorf (53. Band). 1.—6. Tausend. Mit 77 Abbildungen. VII, 160 Seiten.

Kleine Meteoritenkunde

Von **Fritz Heide**, Professor der Mineralogie und Petrographie an der Universität Jena (23. Band). Zweite, neubearbeitete Auflage. 6.—11. Tausend. Mit 107 Abbildungen. VII, 142 Seiten.

Jeder Band Kl.-8°. Ganzleinen DM 7.80

SPRINGER-VERLAG BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany